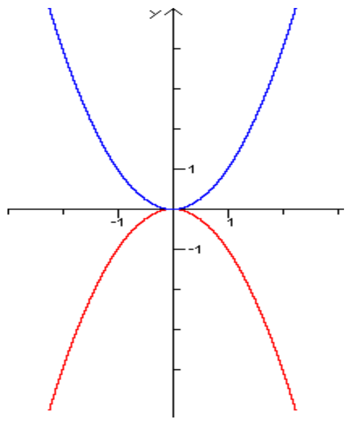
Die Quadratische Gleichung (Gleichung 2. Grades)

Inhaltsverzeichnis

1. Die Quadratische Gleichung (Gleichung 2. Grades)

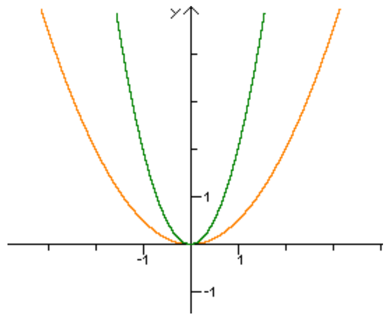
1. Die einfachste Gleichung 2. Grades ist $y = x^2$ und hat Form einer nach **oben offenen** Parabel. Man nennt sie auch **Normparabel.** (blau)
Steht vor dem x ein Minus, ist die Parabel nach **unten offen**. (rot)



Beispiel 1: $y = x^2$ (blau)

Beispiel 2: $y = -x^2$ (rot)

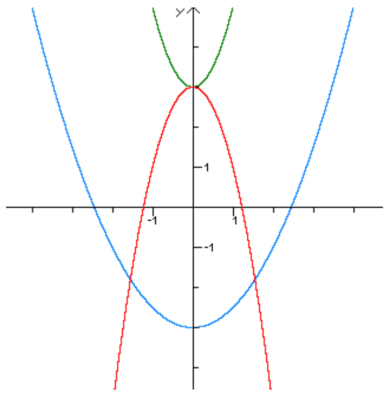
2. Vor dem x kann zusätzlich noch ein Faktor stehen, der die Parabel **steiler** oder **flacher** macht.



Beispiel 1: $y = 2x^2$ (grün, steiler)

Beispiel 2: $y = 0{,}5x^2$ (orange, flacher)

3. Nach dem x steht oft noch ein Summand. Er gibt an, wie weit die Parabel in **Richtung der Y-Achse** verschoben ist. Dabei gibt ein positiver Wert eine Verschiebung nach oben an und ein Negativer nach unten.

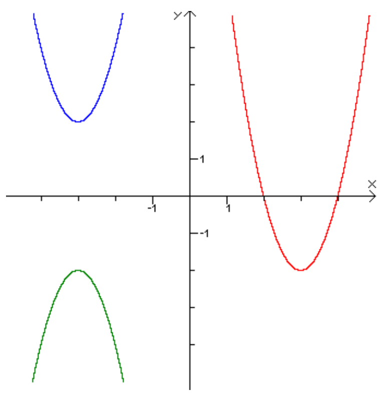


Beispiel 1: $y = 2x^2 + 3$ (grün, 3 nach oben)

Beispiel 2: $y = 0{,}5x^2 - 3$ (hellblau, 3 nach unten)

Beispiel 3: $y = -2x^2 + 3$ (rot, 3 nach oben, Parabel unten offen)

4.Um die Parabel in **x-Richtung** zu verschieben, muss noch ein weiterer Summand zwischen dem x und der Potenz eingefügt werden. Dabei verschiebt ein positiver Summand nach links und ein negativer nach rechts.



Beispiel 1: $y = 2(x+3)^2 + 2$ (blau, 3 nach links, 2 nach oben)

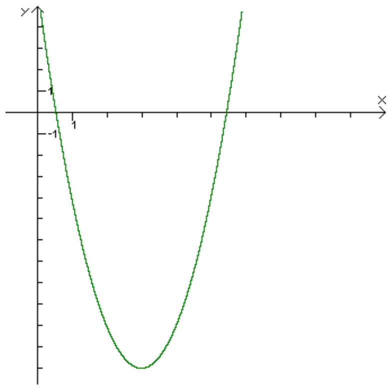
Beispiel 2: $y = 2(x-3)^2 - 2$ (rot, 3 nach rechts, 2 nach unten)

Beispiel 3: $y = -2(x+3)^2 - 2$ (grün, 3 nach links, 2 nach unten)

Diese Form der quadratischen Gleichung nennt man. Scheitelpunktform, weil der Scheitelpunkt direkt abgelesen werden kann.

2. Die Normalform einer Quadratischen Gleichung

Wie wir gesehen haben, kann man aus der Scheitelpunktform kann direkt den Scheitelpunkt der Parabel ablesen.



Beispiel: $y = 2 \times (x-3)^2 - 12$

Die 2 ist der Streckungsfaktor.

-3 in der Klammer gibt die Verschiebung in x-Richtung an und –12 am Schluss, in y-Richtung.

Oft werden aber Funktionen nicht in der Scheitelpunktform, sondern in der **Normalform** angegeben. Um von der Scheitelpunktform zur Normalform zu kommen, muss die Scheitelpunktform aufgelöst werden.

$$y = 2 \times (x-3)^2 - 12 = 2 \times (x^2 - 6x + 9) - 12 = 2x^2 - 12x + 6$$

Die Normalform ist also:

$$2x^2 - 12x + 6 = 0$$

Was sieht man nun aus der Normalform? Eigentlich gar nichts. Aber es gibt da einen Weg um aus dieser Form alles mögliche zu errechnen.

In der Gleichung gibt es 3 Koeffizienten:

A steht vor dem x^2 und ist hier +2
B steht vor dem x und ist hier –12
C steht zum Schluss und ist +6

Mit diesen 3 Koeffizienten kann man nun weiterrechnen. Es gibt Formeln, mit denen man die Nullpunkte (Punkte bei denen der Graph die x-Achse schneidet) und den Scheitelpunkt errechnen kann. Die Herleitung der Formeln erspare ich euch (und mir).

2.1 Nullpunkte mit der A-B-C-Formel

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \times A \times C}}{2 \times A}$$

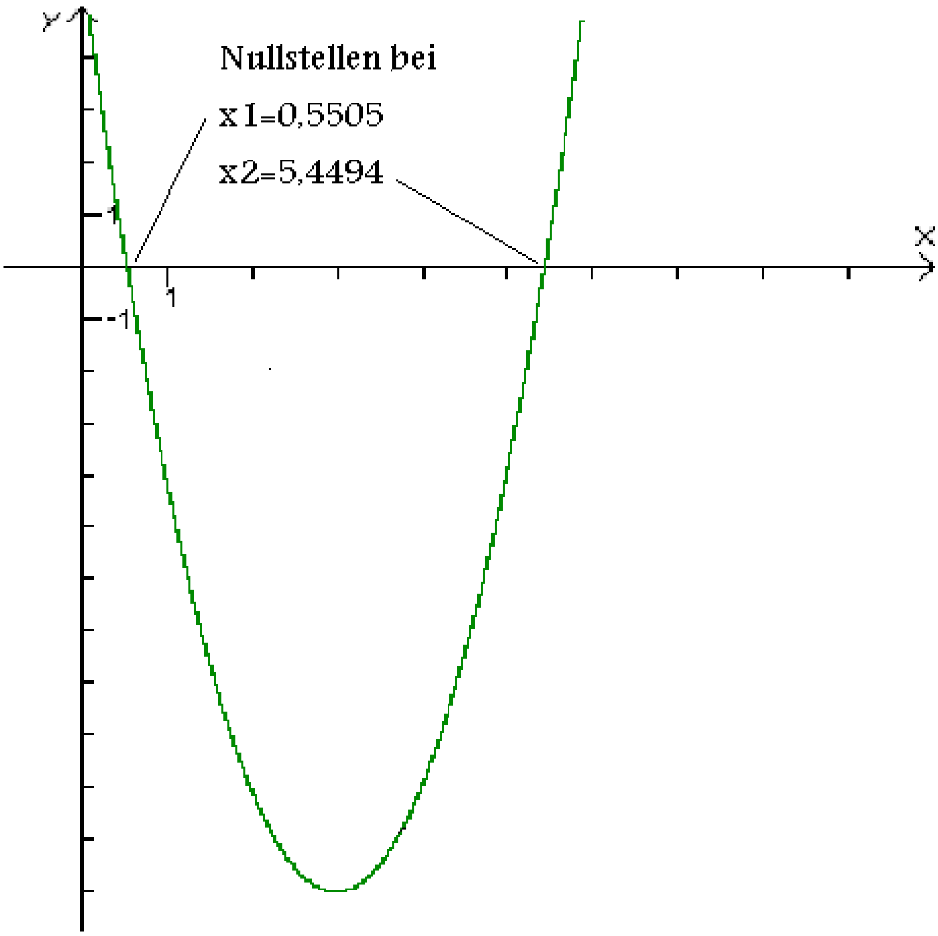
$$x_1 = \frac{-(-12) + \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 2 \times 6}}{2 \times 2} = 5{,}4494$$

$$x_2 = \frac{-(-12) - \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 2 \times 6}}{2 \times 2} = 0{,}5505$$

In diese Gleichung setzt man die Koeffizienten A,B,C ein und bekommt dann die 2 Lösungen **0,5505** und **5,4494**. An diesen x-Koordinaten kreuzt der Graph die x-Achse. (siehe Grafik)

In der Fachliteratur wird auch immer die **Diskriminante** (D) angesprochen. Das ist einfach der Wert unter der Wurzel und hat folgende Bedeutung.

D = 0 Es gibt nur einen Nullpunkt (der Scheitelpunkt)
D < 0 keine Lösung (bedeutet, dass die Parabel die X-Achse nicht schneidet)*
D > 0 zwei Lösungen



* Lösungen gibt es immer, die können aber komplex sein. Im Moment fehlt euch aber wahrscheinlich noch das mathematische Handwerkszeug dafür.

3. Scheitelpunkt aus der Normalform über die Koeffizienten

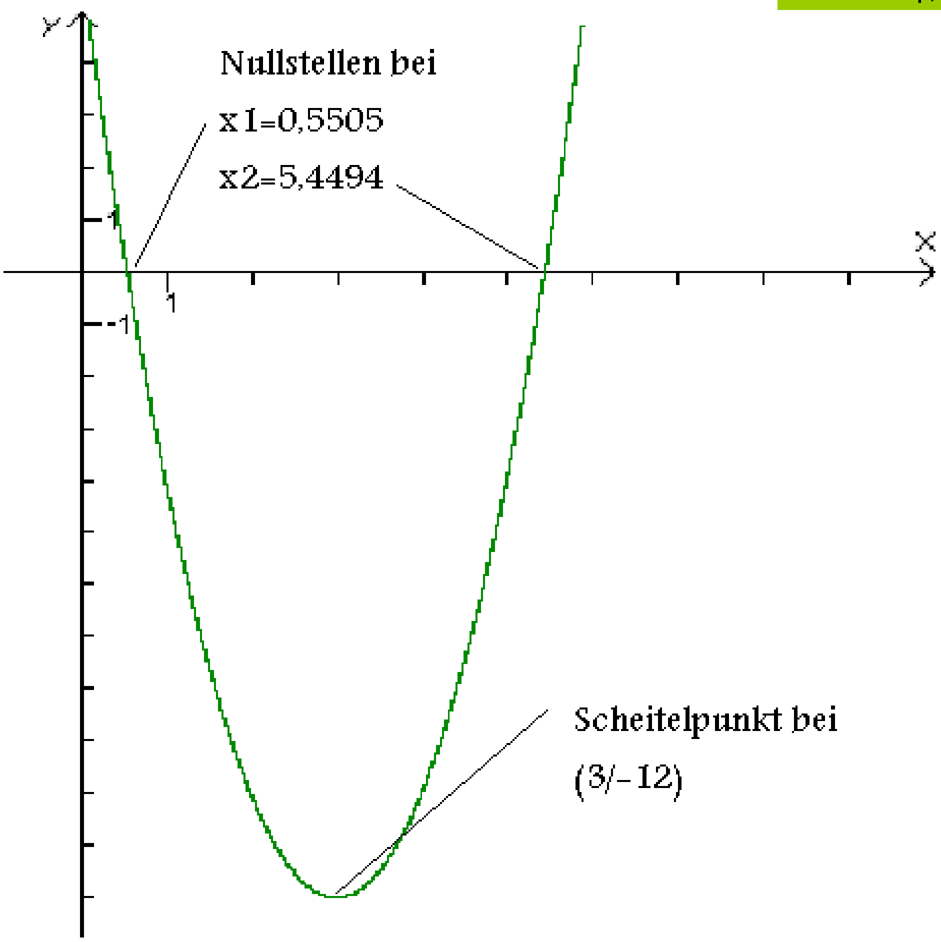
Um die Koordinaten des Scheitelpunktes aus den Koeffizienten zu errechnen, braucht man 2 weitere Formeln.

1: Verschiebung in X-Richtung, wobei das Minus eine Verschiebung nach rechts bedeutet.

$$x_s = \frac{-B}{2 \times A} = \frac{-12}{2 * 2} = -3$$

2:Verschiebung in Y-Richtung, wobei das Minus eine Verschiebung nach unten bedeutet.

$$y_s = C - \frac{B^2}{4 \times A} = 6 - \frac{144}{4 * 2} = -12$$



4. Die Scheitelpunktform aus der Normalform

Oft muss auch die Normalform in die Scheitelpunktform umgewandelt werden. Wie das geht wird hier erklärt.

1.Gegeben ist die Normalform: $2x^2 - 12x + 6$

2.Der Faktor 2 vor dem x² muss zuerst ausgeklammert werden. Hierbei müssen die anderen Terme durch diesen Faktor geteilt werden

$$2 \times (x^2 - 6x + 3)$$

3.Nun nimmt man sich **nur** den Ausdruck in der Klammer vor. (Den Faktor davor merken wir uns und klammern ihn am Schluss wieder ein)
Man entfernt vom Ausdruck in Klammern den konstanten Summand (hier 3) , die Potenz beim x und das mittlere x . Danach teilt man die 6 noch durch 2. Den so erhaltenen Ausdruck setz man in Klammern und fügt die Potenz wieder an.

$$(x^2 - 6x + 3)$$

Die 3 hier brauchen wir später noch!

$$(x - 6)$$

$$(x - 3)^2$$

Vereinfachter Ausdruck

4.Diesen Ausdruck multipliziert man wieder aus (Binomische Formeln!). Allerdings steht jetzt eine 9 als Summand am Schluss.

$$(x - 3)^2 = (x^2 - 6x + 9)$$

5.Da hier aber als Summand +9 rauskommt und in der **Ausgangsklammer +3 stand,** muss noch die Differenz (Hier 6) vom **vereinfachten Ausdruck** abgezogen werden.

$$((x - 3)^2 - 6)$$

6.Zum Schluss klammern wir den Faktor wieder ein und bekommen so die Scheitelpunktform.

$$2 \times ((x - 3)^2 - 6)$$

$$2(x - 3)^2 - 12$$

Wir erhalten also eine mit dem Faktor 2 gestreckte, nach oben offene Parabel mit dem Scheitelpunkt (3/-12).

5. Darstellungsformen

Abschließend möchte ich noch auf die Möglichkeiten eingehen, wie man ein und dieselbe Gleichung darstellen kann.

In Büchern wird oft die Aufgabe gestellt, Scheitelpunkte oder Nullstellen aus gegebenen Werten zu berechnen.

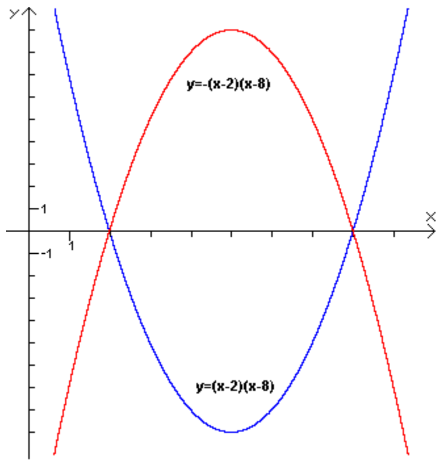
Beispiel:

Eine quadratische Gleichung der Form y = x^2 + ax + b hat die Nullstellen 2 und 8. Berechne den Scheitelpunkt.

Nun die einfachste Form eine quadratische Form darzustellen, wenn die Nullstellen gegeben sind, ist diese:

$$y = (x-2)\cdot(x-8)$$

Aus dieser Form kann man direkt die Nullstellen ablesen. Aber wie kommt man – am einfachsten – zum Scheitelpunkt.



Nun zunächst ist es vollkommen egal, ob die Parabel oben oder unten offen ist, denn das hängt nur vom Minus vor der ersten Klammer ab.

Aber was euch klar sein muss, ist die Tatsache, dass der Scheitelpunkt in der Mitte zwischen 2 und 8 liegen muss!

Also multiplizieren wir einfach die beiden Klammern in der Gleichung

$$y = (x-2)\cdot(x-8)$$

aus und erhalten dann:

$$y = (x-2)\cdot(x-8)$$
$$y = x^2 - 8x - 2x + 16$$
$$y = x^2 - 10x + 16$$

Und wenn wir jetzt noch wissen, dass der Scheitelpunkt in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt, also

$$x_s = \frac{2+8}{2} = 5$$

setzen wir die 5 einfach in die Normalform ein und erhalten die y-Koordinate vom Scheitelpunkt.

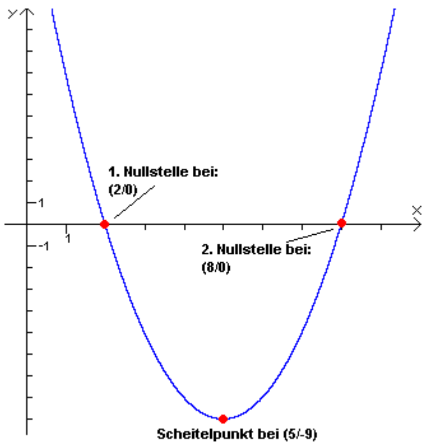
$$y = x^2 - 10x + 16$$
$$y = 5^2 - 10 \cdot 5 + 16$$
$$y = 25 - 50 + 16$$
$$y = -9$$

Für den Fall, dass die Parabel unten offen ist - also mit negativem Vorzeichen – ändert sich das Ergebnis natürlich von –9 zu +9.

Die dritte Möglichkeit die Gleichung darzustellen ist dann auch die Scheitelpunktform, die sich aus den errechneten Werten sofort ergibt.

$$y = (x-5)^2 - 9$$

5.1 Tabelle der Darstellungsformen:

<table>
<tr><td>$y = (x-2) \cdot (x-8)$</td><td>Linearkomponentenform</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>$y = x^2 - 10x + 16$</td><td>Normalform</td></tr>
<tr><td>$y = (x-5)^2 - 9$</td><td>Scheitelpunktform</td></tr>
<tr><td colspan="2">Man sieht hier, dass für eine Gleichung drei Darstellungsformen möglich sind. Wenn man die kennt ist es leicht, alle möglichen Punkte auszurechnen.</td></tr>
</table>