Lösen von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Gleichungen sind nichts anderes als mathematische Beschreibungen einer Regel, wobei die gesuchte Größe, meistens mit x bezeichnet, immer nur in der 1. Potenz ($x = x^1$) vorkommt. Die Variable **x** ist also nichts anderes als das Ergebnis einer beliebig komplizierten Rechenaufgabe.

$$x = 3 * 4 + 1/2$$

Aber leider steht die Gleichung oft nicht in dieser „Normalform“ vor euch, sondern etwa so:

$$3x + 5x - 14 = x + 7$$

Die Variable x kommt hier dreimal vor, es handelt sich aber trotzdem nur um eine einfache Gleichung, mit einer Unbekannten. Wie wir später sehen, kann die Gleichung aber mit etwas „Handwerkszeug“ in die Normalform gebracht werden, um sie zu lösen.

Oft kommen in Aufgaben oder Problemstellungen aber auch zwei Variablen (z.B. Weg und Zeit) vor. Dann müssen aus dem Text der Aufgabe zwei oder mehr Gleichungen entwickelt werden. Das ist dann ein lineares Gleichungssystem.

Auf den folgenden Seiten werden wir verschiedene Beispiele kennen lernen, welche typische Probleme aus dem täglichen Leben sind. Diese werden wir mit Hilfe von „Regeln zum Lösen von Gleichungssystemen“ bearbeiten.

Lösen einfacher linearer Gleichungen

Beispiel 1: Folgende Gleichung ist gegeben.

$$3x + 5x - 14 \quad = 7 + x$$

Als erstes sei angemerkt, dass ihr euch zwischen den 3x und 5x ein Multiplikationszeichen denken müsst. Aber da ihr ja wisst, dass es eine „Punkt vor Strich-Regel“ gibt, macht man es sich einfach und lässt das Multiplikationszeichen einfach weg.
Also $3x$ ist nichts anderes als $3 * x$.

Als nächstes merken wir uns ein paar einfache Schritte um die Gleichung zu lösen.

1. Schritt **Alle Glieder mit x kommen nach links, alle anderen nach rechts.**

$$3x + 5x - 14 \quad = 7 + x \qquad | \quad -x$$

Der senkrechte Strich | oder besser was dahinter steht, sagt uns was wir als nächstes tun müssen. Wenn wir irgendetwas tun, muss uns klar sein, dass wir es immer auf **beiden Seiten des Gleichheitszeichens** tun. Nur so bleibt es auch eine „Gleichung“. Wir ziehen hier also **x** ab, und das auf beiden Seiten. Dabei kommt **-x** auf der linken und auf der rechten Seite dazu.

$$3x + 5x - 14 - x \quad = 7 + x - x$$

Auf der rechten Seite sehen wir jetzt **7 + x –x.** Also fällt x auf der rechten Seite raus.

$$3x + 5x - 14 - x \quad = 7 \qquad | \quad + 14$$

Jetzt addieren wir 14 auf beiden Seiten.

$$3x + 5x - 14 + 14 - x \quad = 7 + 14$$

Auf der linken Seite fällt die 14 also wieder raus.

$$3x + 5x - x \quad = 7 + 14$$

2. Schritt **Zusammenfassen von gleichen Gliedern**

$$7x \quad = 21$$

Auf der linken Seite sollte man dran denken, dass **–x** ja eigentlich **– 1x** ist. Das wird gerne falsch gemacht !

3. Schritt **Auflösen nach x**

$$7x = 21 \quad | :7$$

Jetzt fragen sich bestimmt viele warum teilen. Nun **7x** ist ja **7 * x**. Also müssen wir auf beiden Seiten durch 7 teilen um es auf der linken Seite zu entfernen.

$$7 * x : 7 = 21 : 7$$

Jetzt seht ihr wieder, dass die 7 auf der linken Seite rausfällt, da wir ja erst mit 7 multiplizieren und dann wieder teilen.

$$x = 21 : 7$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Fertig !

Beispiel 2

$$\tfrac{3}{4}\,x + 0{,}5 = 3x - 4$$

1. Schritt **Sortieren**

$$\tfrac{3}{4}\,x + 0{,}5 = 3x - 4 \quad | -3x\,;\ -0{,}5$$

Wie man sieht, kann man auch zwei Dinge auf einmal tun. Wir ziehen **3x** ab, um es von rechts nach links zu bringen und gleichzeitig ziehen wir noch **0,5** ab, um auch dieses Glied von links nach rechts zu bringen.

$$\tfrac{3}{4}\,x - 3x = -4 - 0{,}5$$

2. Schritt **Zusammenfassen**

$$-2\tfrac{1}{4}\,x = -4{,}5 \quad | * (-1)$$

Da auf beiden Seiten negative Glieder stehen, multiplizieren wir einfach mit **(-1)** um die Werte positiv zu machen. (minus mal minus ist plus)

$$2\tfrac{1}{4}\,x = 4{,}5$$

3. Schritt Auflösen nach x

$$2\,\tfrac{1}{4}\,x = 4{,}5 \quad | : 2\,\tfrac{1}{4}$$

$$x = 4{,}5 : 2\,\tfrac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Allerdings sollte man einen letzten Schritt nicht vergessen. **Die Kontrolle**.
Dazu setzt man die gefundene Lösung in die Ursprungsgleichung ein und löst sie auf.

4. Schritt Kontrolle

$$\tfrac{3}{4} * 2 + 0{,}5 = 3 * 2 - 4$$

$$1{,}5 + 0{,}5 = 6 - 4$$

$$\underline{\underline{2 = 2}}$$

Da die letzte Aussage stimmt, ist auch das Ergebnis in Ordnung.

Also nie die Kontrolle vergessen.

Schema zum Lösen von einfachen linearen Gleichungen.

Schritt 1	Glieder mit x auf die linke und alle anderen auf die rechte Seite bringen.
Schritt 2	Glieder zusammenfassen.
Schritt 3	Nach x auflösen
Schritt 4	Kontrolle, indem man das Ergebnis in die Ursprungsgleichung einsetzt.

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen.

Stellen wir uns folgendes Problem vor:

Um von Zuhause zum Flughafen zu fahren haben wir zwei Möglichkeiten. Wir können mit dem Taxi fahren oder uns einen Leihwagen nehmen.

Für das Taxi fallen folgende Kosten an:

Grundgebühr: 3,- €

Pro km: 1,5 €

Der Leihwagen kostet uns.

Grundgebühr: pauschal 20 € am Tag

Pro km: 0,5 €

Die Strecke zum Flughafen beträgt 38 km.

Hier haben wir das Problem, dass wir nicht wissen was die günstigere Variante ist. Oder anders ausgedrückt, bis zu welcher Entfernung lohnt es sich, mit dem Taxi zu fahren. An diesem einfachen Beispiel werden wir uns ein Gleichungssystem mit zwei Variablen und zwei Gleichungen entwickeln.

Überlegen wir uns, was hier unsere Variablen sind. Nun wir sind an zwei Dingen Interessiert: Einmal am Fahrpreis (das wird unsere Variable y) und zum Zweiten an der Strecke (x) bis zu der es sich lohnt Taxi, zu fahren.

1. Gleichung für das Taxi

$$y = 3 + 1{,}5 * x$$

In dieser Gleichung wird nicht anderes ausgedrückt, als dass der Fahrpreis (y) die Grundgebühr (3 €) plus der Preis für einen Kilometer (1,5 €) mal die Strecke (x) ist.

2. Gleichung für den Leihwagen

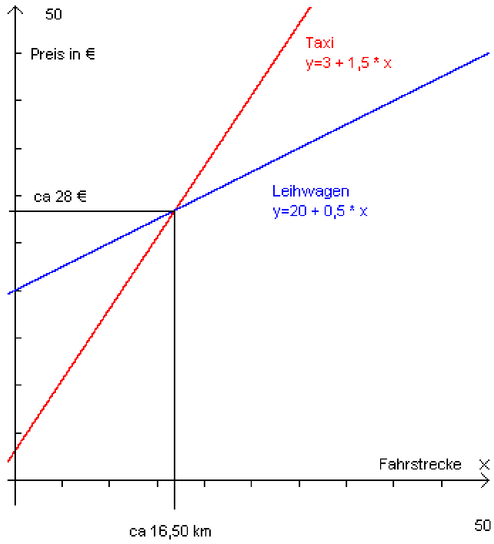
$$y = 20 + 0{,}5 * x$$

Die Grundgebühr ist hier 20 € und der Preis pro km beträgt 0,5 €.

Graphische Lösung des Problems

Die eben gefundenen Gleichungen sind sogenannte „Geradengleichungen“ im Koordinatensystem. Zeichnen wir die Geraden ein.

1. **Taxi** $y = 3 + 1{,}5 * x$
2. **Leihwagen** $y = 20 + 0{,}5 * x$



Wie man sieht, liegt die rote Gerade bis zu einer Strecke von ca. 16,5 km unterhalb der Blauen. Das bedeutet aber auch, dass es einen Punkt geben muss, in dem beide Gleichungen genau den gleichen Wert haben. In der Zeichnung ist das der Kreuzungspunkt. Der Fahrpreis, der diesem Punkt entspricht ist ca. 28 €.

Aber wie kann man diesen Punkt genau berechnen?

Nun hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten. Als erstes überlegen wir uns, dass in dem Punkt in dem sich die Geraden berühren der y-Wert beider Geraden gleich ist. Also der y-Wert der 1. Gleichung ist gleich dem y-Wert der 2. Gleichung. Zur Lösung setzen wir die beiden Geradengleichungen gleich.

Lösung des Problems mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Taxi $y = 3 + 1{,}5 * x$ **Leihwagen** $y = 20 + 0{,}5 * x$

Gleichsetzen

$$3 + 1{,}5 * x = 20 + 0{,}5 * x$$

Im nächsten Schritt müssen wir wieder alle Glieder mit x auf die linke und alle anderen auf die rechte Seite bringen.

$$3 + 1{,}5\,x = 20 + 0{,}5\,x \quad | -0{,}5x\ ;\ -3$$

$$1{,}5\,x - 0{,}5x = 20 - 3 \quad | \text{Zusammenfassen}$$

$$1x = 17 \quad | \text{Auflösen}$$

$$\underline{\underline{x = 17}}$$

Das Ergebnis **x = 17** sagt also, dass bei einem x-Wert von 17 km der Preis bei beiden Möglichkeiten der Gleiche ist.

Setzen wir den x-Wert nun in eine der beiden Ausgangsgleichungen, egal ob für das Taxi oder den Leihwagen, ein können wir uns den zugehörigen Preis berechnen.

3. Taxi $\quad y = 3 + 1{,}5 * x$

$y = 3 + 1{,}5 * 17 \quad = \quad 28{,}5$ €

$\underline{y \quad = \quad 28{,}5 \text{ €}}$

4. Leihwagen $\quad y = 20 + 0{,}5 * x$

$y = 20 + 0{,}5 * 17 \quad = \quad 28{,}5$ €

$\underline{y \quad = \quad 28{,}5 \text{ €}}$

Da wir den gleichen y-Wert mit beiden Ursprungsgleichungen errechnet haben, muss der Wert von 28,5 € stimmen.

Da wir aber zum Flughafen eine Strecke von 38 km fahren müssen, wählen wir besser den Leihwagen.

Lösen des Problems mit dem Einsetzungsverfahren.

Das Einsetzungsverfahren ist eigentlich nur eine etwas abgewandelte Form des Gleichsetzungsverfahrens, bei dem eine Gleichung nach **x** umgestellt wird, um die so gefundenen Gleichung in die andere Gleichung, statt **x,** einzusetzen. Wir wollen nun die Gleichung für den Leihwagen nach **x** Umstellen

Taxi $\quad y = 3 + 1{,}5 * x$ **Leihwagen** $\quad y = 20 + 0{,}5 * x \quad | -20$

$y - 20 = 0{,}5 * x \quad | \; / \; 0{,}5 \; (= *2)$

$(y - 20) * 2 = x$

$y = 3 + 1{,}5 * \underline{x} \quad \longleftarrow \quad \underline{2y - 40} = x$

Der so gewonnene Ausdruck **2y – 40** in der rechten Gleichung kann statt **x** in der linken Gleichung eingesetzt werden. (aber die Klammer nicht vergessen)

$$y = 3 + 1{,}5 * (2y - 40)$$

Ausdruck sortieren:

y	=	3 + *1,5* ∗ ***(2y – 40)***	Ausklammern
y	=	3 + **3y – 60**	- 3y

Vereinfachen

- 2y	=	- 57	∗ (- 1)
2y	=	57	/ 2

Auflösen

y = 28,5

Nun sehen wir, dass **y** mit dem **Einsetzungsverfahren**, genau wie mit dem Gleichsetzungsverfahren, 28,5 € ergibt

Wenn wir nun das gefundene **y** in eine der Ursprungsgleichungen einsetzen, bekommen wir für **x** wieder die 17 km als Lösung.

Taxi	**y**	**= 3 + 1,5 ∗ x**	
	28,5	**= 3 + 1,5 ∗ x**	-3
	25,5	**= 1,5 x**	/ 1,5
	17	**= x**	

Leihwagen	**y**	**= 20 + 0,5 ∗ x**	
	28,5	**= 20 + 0,5 ∗ x**	-20
	8,5	**= 0,5 x**	/ 0,5
	17	**= x**	

Wie wir sehen können, ist die Lösung wieder 17 km und 28,5 €

Lösen des Problems mit dem Additionsverfahren

Ihr fragt euch jetzt sicher, wozu man noch ein drittes Verfahren braucht, wenn man doch schon zwei hat. Die Lösung ist ganz Einfach: Das jetzt behandelte Additionsverfahren ist sehr gut geeignet, um auch Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten und mehr als zwei Gleichungen zu lösen.

Zur Einführung bleiben wir aber bei unserem Taxi-Leihwagen-Problem.

Das Verfahren beginnt damit, dass wir beide Gleichungen in eine Normalform bringen, bei der auf der linken Seite alle Glieder stehen die unbekannt sind (x, y, z), und auf der rechten die anderen Glieder.

Taxi $y = 3 + 1{,}5 * x$

$y = 3 + 1{,}5\,x \quad | -1{,}5x$

$-1{,}5x + y = 3$

Leihwagen $y = 20 + 0{,}5 * x$

$y = 20 + 0{,}5\,x \quad | -0{,}5x$

$-0{,}5x + y = 20$

Normalform

Im nächsten Schritt werden die Gleichungen untereinander geschrieben, so dass von links nach rechts die unbekannten x, y und evtl auch z geschrieben werden. Links und rechts wird jeweils noch eine Linie gezeichnet die anzeigt, dass diese beiden Gleichungen zusammengehören.

$$\left|\begin{array}{lr} -1{,}5x + y & = 3 \\ -0{,}5x + y & = 20 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ *(-3) \end{array}$$

Hinter die rechte Linie wird wieder geschrieben was mit der Gleichung angestellt wird. Hier wird zuerst wieder die 2. Gleichung mit –3 multipliziert, um im nächsten Schritt **x** entfernen zu können.

$$\left|\begin{array}{lr} -1{,}5x + y & = 3 \\ 1{,}5x - 3y & = -60 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ +\mathrm{I} \end{array}$$

Das Zeichen –I zeigt an, dass wir zur zweiten Gleichung die erste addieren. 1,5x fällt wieder raus und zu - 3y wird + y addiert. Aus - 60 wird dann logischerweise – 57.

$$\left|\begin{array}{lr} -1{,}5x + y & = 3 \\ -2y & = -57 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ /(-2) \end{array}$$

Die zweite Gleichung wird nun noch durch -2 geteilt, um das Ergebnis für y zuerhalten

$$\left|\begin{array}{rcl} -1{,}5x + y & = & 3 \\ y & = & 28{,}5 \end{array}\right|$$

Die Gleichung hat jetzt die sogenannte Dreiecksform, bei der man ganz einfach die gefundenen Unbekanten von unten nach oben einsetzen kann.

$$\left|\begin{array}{rcl} -1{,}5x + y & = & 3 \\ y & = & 28{,}5 \end{array}\right| \quad \text{y einsetzen}$$

$$\left|\begin{array}{rcl} -1{,}5x + 28{,}5 & = & 3 \\ y & = & 28{,}5 \end{array}\right| \quad -28{,}5$$

$$\left|\begin{array}{rcl} -1{,}5x & = & -25{,}5 \\ y & = & 28{,}5 \end{array}\right| \quad / (-1{,}5)$$

$$\left|\begin{array}{rcl} x & = & 17 \\ y & = & 28{,}5 \end{array}\right|$$

<u>Und siehe da, die Lösung ist wieder die Gleiche. y = 28,5 € und x = 17 km.</u>

2. Beispiel mit dem Additionsverfahren

Um etwas Übung im Additionsverfahren zu bekommen, werde ich noch zwei Beispiele durchspielen.

Aufgabe: Ein Vater und sein Sohn, sind zusammen 60 Jahre alt. Der Vater ist aber genau 4 mal älter als der Sohn. Berechne das Alter der beiden.

Zuerst legen wir wieder fest welche Variablen wir nehmen:

x = Alter des Sohn

y = Alter des Vaters

1. Gleichung: $x + y = 60$

2. Gleichung $y = 4 * x$

Die Zweite Gleichung bringen wir erst wieder in die Normalform.

$$y = 4 * x \quad | \quad -4x$$

$$\mathbf{-4x + y = 0}$$

Gleichung untereinander schreiben und Linien einfügen.

$$\left|\begin{array}{rcl} x + y & = & 60 \\ -4x + y & = & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} * 4 \\ \\ \end{array}$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir jetzt mit 4, um die -4x in der unteren Gleichung entfernen zu können.

$$\left|\begin{array}{rcl} 4x + 4y & = & 240 \\ -4x + y & = & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ +I \end{array}$$

Zur zweiten Gleichung wird erste addiert. -4x fällt wieder raus. Der Rest dürfte ja klar sein.

$$\left|\begin{array}{rcl} 4x + 4y & = & 240 \\ 5y & = & 240 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ / 5 \end{array}$$

Die zweite Gleichung teilen wir durch 5, um y zu erhalten

$$\left|\begin{array}{rcl} 4x + 4y & = & 240 \\ y & = & 48 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \text{y in I einsetzen} \\ \\ \end{array}$$

Das gefundene y setzen wir jetzt in die erste Gleichung ein, und multiplizieren es gleich mit 4.

$$\left|\begin{array}{rcl} 4x + 192 & = & 240 \\ y & = & 48 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} -192 \\ \\ \end{array}$$

Dann ziehen wir 192 in der Rechten ab,

$$\left|\begin{array}{rcl} 4x & = & 48 \\ y & = & 48 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} / 4 \\ \\ \end{array}$$

und teilen noch durch 4.

$$\left|\begin{array}{rcl} \underline{x} & \underline{=} & \underline{12} \\ \underline{y} & \underline{=} & \underline{48} \end{array}\right|$$

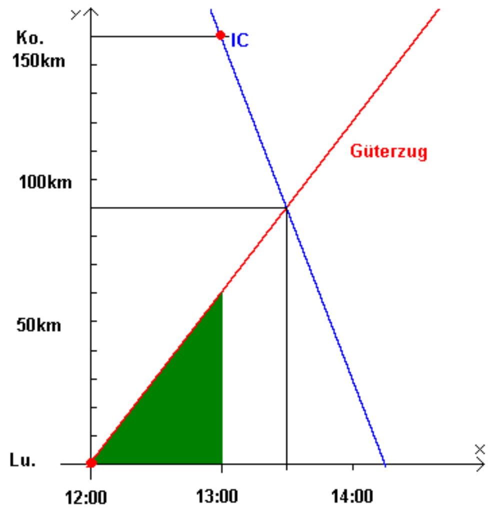
Das Alter des Sohns ist also 12 (x) , und der Vater ist 48 (y) Jahre alt. Zur Kontrolle können wir noch beide addieren und sehen, dass die Summe tatsächlich 60 ist, und 48 geteilt durch 12 ist auch 4.

3. Beispiel zum Additionsverfahren

Das letzte Beispiel, dass ich in diesem Zusammenhang zeigen will, ist etwas komplizierter. Wenn wir uns aber an das Strickmuster halten, ist auch dass kein Problem.

Aufgabe: Zwischen Ludwigshafen und Koblenz sind 150 km Bahnstrecke. In Ludwigshafen startet um 12:00 Uhr ein Güterzug der eine mittlere Geschwindigkeit von 60 km/h fährt. Aus Koblenz startet um 13:00 Uhr ein IC, der im Schnitt 120 km/h schnell fährt.

Die Frage: Nach welcher Strecke und zu welcher Zeit treffen sich die Züge?



Versuchen wir zuerst, anhand des Diagramms, einige Fakten zu verdeutlichen.

Die rote Linie zeigt den Güterzug, der um 12:00 in Lu. startet und irgendwann, rechts oben, in Koblenz ankommt.

Die blaue Linie zeigt den IC. Der startet um 13:00 Uhr in Koblenz. Wie man aber sieht, schneidet die blaue Linie die y-Achse weiter oben. Diesen Punkt brauchen wir aber, um die Geradengleichung aufstellen zu können. Die Frage ist nun, wie weit der IC, in der schon vergangenen Stunde, gefahren währe. Da er 120 km/h fährt, sind es logischerweise 120 km. Die müssen wir nun zu den 150km Entfernung zwischen Ludwigshafen und Koblenz addieren, und wir erhalten 270 km.

Die allgemeine Geradengleichung lautet: $y = m * x + b$

m = Steigung der Gerade
b = y-Achsenabschnitt (Der Punkt, in dem die Gerade die y-Achse schneidet)

1. Gleichung (Güterzug) $y = 60 * x + 0$

Die Steigung der Gerade bekommen wir, wenn wir das grüne Steigungsdreieck betrachten. Wir müssen die Höhe y durch die Breite x teilen. 60km / 1h = **60km/h** . Also genau die Geschwindigkeit des Zugs.

Da die Gerade die y-Achse genau im Nullpunkt schneidet, ist sie hier null.

2. Gleichung (IC) $y = -120 * x + 270$

Die Steigung der Gerade ist wieder die Geschwindigkeit, allerdings mit negativem Vorzeichen, da die Steigung auch negativ ist. (Der y-Wert wird kleiner, wenn der x-Wert größer wird)

Die 270 ist der Punkt, in dem die blaue Gerade die y-Achse schneidet.

Nach dem Umstellen in die Normalform haben wir folgendes Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcr} -60x + y & = & 0 \\ 120x + y & = & 270 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} * 2 \\ \end{array}$$

Die erste Gleichung wird mit 2 Multipliziert.

$$\left| \begin{array}{rcr} -120x + 2y & = & 0 \\ 120x + y & = & 270 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \\ + \mathrm{I} \end{array}$$

Zur 2. Gleichung wird die Erste addiert.

$$\left| \begin{array}{rcr} -120x + 2y & = & 0 \\ 3y & = & 270 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \\ / 3 \end{array}$$

Die zweite wird durch 3 geteilt, um y zu erhalten.

$$\left| \begin{array}{rcr} -120x + 2y & = & 0 \\ y & = & 90 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{y einsetzen} \\ \end{array}$$

Dann setzen wir y in die Erste ein, und multiplizieren mit 2,

$$\left| \begin{array}{rcr} -120x + 180 & = & 0 \\ y & = & 90 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} -180 \\ \end{array}$$

Ziehen 180 in der rechten ab

$$\left| \begin{array}{rcr} -120x & = & 180 \\ y & = & 90 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} /(-120) \\ \end{array}$$

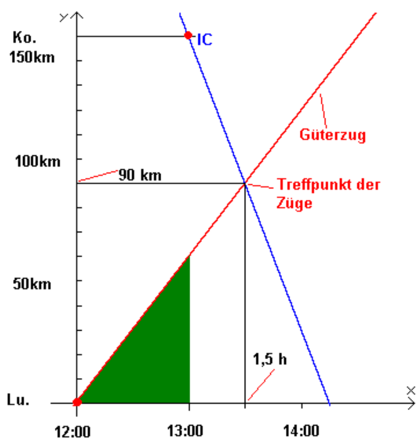
und teilen durch – 120.

$$\left| \begin{array}{rcr} \underline{\mathbf{x}} & \underline{=} & \underline{\mathbf{-1{,}5}} \\ \underline{\mathbf{y}} & \underline{=} & \underline{\mathbf{90}} \end{array} \right|$$

Was bedeutet das Ergebnis?

Nun, wenn wir wieder ins Diagramm schauen, ist auf der x-Achse die Zeit aufgetragen. Das Ergebnis bei x = 1,5 bedeutet also, dass sich die Zügen 1,5 Stunden nach der Abfahrt des Güterzuges, in Ludwigshafen, treffen.

Auf der y-Achse ist die Entfernung eingetragen. Der Güterzug fährt also 90 km, bis sich die Züge auf der Strecke begegnen.



Lösen von Gleichungssystemen mit drei Variablen.

Zum Lösen von Gleichungssystemen mit drei Unbekanten (oder Variablen), kann das Vorgehen aus den Lösungen für zwei Variablen genau so angewendet werden wie gezeigt. Lediglich die Anzahl der Schritte wird größer und der Aufwand etwas komplexer. Wir werden auch eine Vereinfachung kennen lernen, die es uns Erlaubt ein beliebiges Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus zu lösen.

1. Aufgabe mit drei Variablen

Ein Weinhändler bietet drei verschiedene Geschenkkartons mit Wein an. In jeder Kiste ist Rotwein, Weißwein und Rose in verschiedenen Stückzahlen.

- Die 1. Kiste kostet 16,00- €
  (Inhalt: 2Fl. Weißwein, 1Fl. Rotwein, 2Fl. Rose)

- Die 2. Kiste kostet 17,50- €
  (Inhalt: 1Fl. Weißwein, 3Fl. Rotwein, 1Fl. Rose)

- Die 3. Kiste kostet 16,50- €
  (Inhalt: 3Fl. Weißwein, 1Fl. Rotwein, 1Fl. Rose)

- Im Preis jeder Kiste sind die Verpackungskosten von 1,5 € eingeschlossen.

Die Aufgabe :

Berechne die Preise einer Flasche Weißwein, Rotwein und Rose.

Diese Aufgabe ist ein typisches Problem für ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten (x,y,z). Machen wir uns zuerst mal eine Tabelle in der alle Daten enthalten sind:

Weißwein	**Rotwein**	**Rose**	**Verpackung**	**Preis**
2 Fl.	1 Fl.	2 Fl.	1,5 €	**16 €**
1 Fl.	3 Fl.	1 Fl.	1,5 €	**17,5 €**
3 Fl.	1 Fl.	1 Fl.	1,5 €	**16,5 €**

Ordnen wir erst mal wieder die Variablen zu.

Weißwein = x
Rotwein = y
Rose = z

Aus dieser Tabelle können wir schon recht einfach unsere 3 Gleichungen ablesen. Denn für den ersten Karton gilt:

$$2*x + 1*y + 2*z + 1{,}5 \quad = \quad 16$$

(2 Flaschen Weißwein + 1 Flaschen Rotwein + 2 Flasche Rose + 1,5€ Verpackung = 16 €)

Diese Gleichung bringen wir in die Normalform indem die 1,5 € Verpackungskosten auf die rechte Seite geschoben werden:

$$2*x + 1*y + 2*z + 1{,}5 = 16 \qquad | \quad -1{,}5$$

$$2*x + 1*y + 2*z = 16 - 1{,}5$$

1. Gleichung $\quad 2*x + 1*y + 2*z = 14{,}5$

Die 2. und 3. Gleichung wird genau so erstellt, so dass wir folgendes Gleichungssystem erhalten.

Das Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{array}{ll} 2*x + 1*y + 2*z & = 14{,}5 \\ 1*x + 3*y + 1*z & = 16 \\ 3*x + 1*y + 1*z & = 15 \end{array}}$$

Der Weg

Jetzt kommt wieder unser bekanntes Strickmuster. Zuerst die Gleichungen untereinander schreiben und die Striche zufügen.

$$\left| \begin{array}{ll} 2x + 1y + 2z & = 14{,}5 \\ 1x + 3y + 1z & = 16 \\ 3x + 1y + 1z & = 15 \end{array} \right| \begin{array}{l} *\ 3 \\ *\ 6 \\ *\ 2 \end{array}$$

Wir multiplizieren hier jede Gleichung mit einem Faktor, um **x** auf gleiche Beträge zu bekommen. So können wir wieder durch Addition/Subtraktion Variablen eliminieren.

$$\left| \begin{array}{ll} 6x + 3y + 6z & = 43{,}5 \\ 6x + 18y + 6z & = 96 \\ 6x + 2y + 2z & = 30 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ -\ \mathrm{I} \\ -\ \mathrm{I} \end{array}$$

Danach ziehen wir von der 3. und 2. Gleichung die 1. Gleichung ab, und entfernen damit **x** aus der 2. und 3. Gleichung und z aus der 2.

$$\left|\begin{array}{lcl} 6x + 6y + 3z & = & 46{,}5 \\ 15y & = & 52{,}5 \\ -1y \; - 4z & = & -13{,}5 \end{array}\right| \quad /15$$

Jetzt teilen wir die 2. Gleichung durch 15, um y zu erhalten.

$$\left|\begin{array}{lcl} 6x + 6y + 3z & = & 46{,}5 \\ y & = & 3{,}5 \\ -y - \; 4z & = & -13{,}5 \end{array}\right| \quad +II$$

Zu der 3. addieren wir nun noch die 2. Gleichung um z aus der 3. zu entfernen.

$$\left|\begin{array}{lcl} 6x + 6y + 3z & = & 46{,}5 \\ y & = & 3{,}5 \\ -4z & = & -10 \end{array}\right| \quad / (-4)$$

Nach dem Teilen der 3. Gleichung durch 4, steht auch hier **z** alleine da.

$$\left|\begin{array}{lcl} 6x + 6y + 3z & = & 46{,}5 \\ y & = & 3{,}5 \\ z & = & 2{,}5 \end{array}\right| \quad / 6$$

Die Erste vereinfachen wir dann noch, indem wir sie durch 6 teilen und abschließend werden noch die Werte von **y** und **z** eingesetzt.

$$\left|\begin{array}{lcl} x + y + 0{,}5z & = & 7{,}75 \\ y & = & 3{,}5 \\ z & = & 2{,}5 \end{array}\right| \quad \text{x und y einsetzen}$$

$$\left|\begin{array}{lcl} x + 3{,}5 + 1{,}25 & = & 7{,}75 \\ y & = & 3{,}5 \\ z & = & 2{,}5 \end{array}\right| \quad -3{,}5; -1{,}25$$

$$\left|\begin{array}{lcl} x & = & 3 \\ y & = & 3{,}5 \\ z & = & 2{,}5 \end{array}\right|$$

Die Lösung

Der Weißwein kostet 3,-€, der Rotwein 3,5 € und der Rose 2,5 €.

Am Schluss der Aufgabe, sollte man auch hier nicht versäumen, die Kontrolle zu durchzuführen. Dazu setzen wir die Ergebnisse in die Tabelle ein.

Weißwein	**Rotwein**	**Rose**	**Verpackung**	**Preis**
2 Fl. ∗ 3 € = 6	1 Fl. ∗ 3,5 € = 3,5	2 Fl. ∗ 2,5 € = 5	1,5 €	**16 €**
1 Fl. ∗ 3 € = 3	3 Fl. ∗ 3,5 € = 10,5	1 Fl. ∗ 2,5 € = 2,5	1,5 €	**17,5 €**
3 Fl. ∗ 3 € = 9	1 Fl. ∗ 3,5 € = 3,5	1 Fl. ∗ 2,5 € = 2,5	1,5 €	**16,5 €**

6 + 3,5 + 5 + 1,5 = 16 Stimmt !

3 + 10,5 + 2,5 + 1,5 = 17,5 Stimmt !

9 + 3,5 + 2,5 + 1,5 = 16,5 Stimmt !

Übungen und Lösungen:

$$\left| \begin{array}{rl} -2x + 3y & = -3z - 7 \\ -3z & = -2x - 14 \\ -36 & = -3z \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} x = 11 \\ y = -7 \\ z = 12 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{rl} 3x & = -4z - 13 \\ -3y - 9x & = -6 + 12z \\ -8z & = 5x + 7 \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} x = -19 \\ y = 15 \\ z = 11 \end{array}$$

Lösen von Gleichungssystemen mit dem Gausverfahren

Nachfolgend wird ein Algorithmus beschrieben, der für jedes beliebige Gleichungssystem angewendet werden kann. Wir werden es zuerst wieder an unserem Beispiel mit den Weinflaschen durchspielen.

Grundsätzliches

Der Gauß-Algorithmus vereinfacht ein Gleichungssystem so, dass vom gefundenen System nur die Koeffizienten der Variablen (x y z) übrig bleiben.

$$\begin{aligned} 2*x + 1*y + 2*z &= 14{,}5 \\ 1*x + 3*y + 1*z &= 16 \\ 3*x + 1*y + 1*z &= 15 \end{aligned}$$

So hat unser Gleichungssystem ursprünglich ausgesehen.

$$\begin{array}{cccc} \underline{2} & 1 & 2 & = 14{,}5 \\ 1 & \underline{3} & 1 & = 16 \\ 3 & 1 & \underline{1} & = 15 \end{array}$$

Nach der Vereinfachung, bleibt noch dass davon übrig. Man nennt es eine Matrix. (Pl. Matrizen)

Wie man sieht, sind nur noch die Koeffizienten übrig geblieben und alles andere fehlt. Wichtig ist dabei nur, dass die Koeffizienten in jeder Zeile, in der gleichen Reihenfolge stehen. Also hier x y z .

Gauß hat sein Verfahren auch Eliminationsverfahren genannt, weil am Ende alle Koeffizienten, bis auf die drei diagonalen Koeffizienten von links oben nach rechts unten, zu 0 werden. In der Diagonalen steht dann jeweils eine 1. Diese 1 repräsentiert dann das Ergebnis für die jeweilige Variable.

In der letzten Spalte steht dann das Ergebnis von x y z.

Der Weg

Schritt 1a

Zuerst teilen wir Zeile 1 durch zwei. Dadurch bekommen wir in der ersten Spalte (rot) eine 1.

2	1	2	= 14,5	/ 2
1	3	1	= 16	
3	1	1	= 15	

Schritt 1b

Zeile 2 minus Zeile 1, und Zeile 3 minus dreimal die erste Zeile. Dadurch werden die roten Koeffizienten in Zeile 2 und 3, zu Null.

1	0,5	1	= 7,25	
1	3	1	= 16	- I
3	1	1	= 15	- (3∗I)

Schritt 2a

Zeile 2 durch 2,5 teilen, um den blauen Koeffizienten in der 2. Zeile auf 1 zu setzen.

1	0,5	1	= 7,25	
0	2,5	0	= 8,75	/ 2,5
0	-0,5	-2	= - 6,75	

Schritt 2b

Zeile 1 minus 0,5 mal die 2. Zeile und Zeile 3 plus 0,5 mal die 2. Zeile. Dadurch werden die blauen Koeffizienten in den Zeilen 1 und 3 zu Null

1	0,5	1	= 7,25	- (0,5∗II)
0	1	0	= 3,5	
0	-0,5	-2	= - 6,75	+ (0,5∗II)

Schritt 3a

Zeile 3 durch -2 teilen, um den grünen Koeffizienten in Zeile 3 auf den Wert 1 zu bringen.

1	0	1	= 5,5	
0	1	0	= 3,5	
0	0	-2	= - 5	/ (- 2)

Schritt 3b

Zum Schluss, ziehen wir noch von Zeile 1 die Zeile 3 ab. Dadurch wird der grüne Koeffizient in Zeile 1 eliminiert

1	0	1	= 5,5	| - III
0	1	0	= 3,5	
0	0	1	= 2,5	

Schließlich erhalten wir eine Matrix, der folgenden Form.

1	0	0	= 3
0	1	0	= 3,5
0	0	1	= 2,5

Das Ergebnis

In der ersten Zeile sehen wir nur noch die rote 1 und das Ergebnis 3. Da in der ersten (roten) Spalte die Werte für Weißwein standen, ist das Ergebnis wieder der Preis für eine Flasche Weißwein, nämlich 3€.

In der 2. Zeile ist die y-Spalte 1, und das Ergebnis ist 3,5 €. Das war unser Preis für die Rotweinflasche.

Die 2,5 € als Ergebnis in der 3. Zeile, ist dann auch schließlich der Preis für die Flasche Rose. Hier ist die grüne Spalte 1.

Wie man sieht ist dieses Verfahren sehr effizient und schnell durchzuführen. Die Vorgehensweise ist dabei immer gleich. Je Zeile im Gleichungssystem ist ein Schritt (und ein Unterschritt 1a/1b) nötig. Im ersten Teilschritt wird der jeweilige Koeffizient (x y z), durch Multiplikation oder Division, auf den Wert „1“ gebracht. Im zweiten Teilschritt werden dann die restlichen Zeilen, durch Addition oder Subtraktion, auf „0“ gesetzt.

Neu ist hierbei nur, dass wir teilweise mit Vielfachen ganzer Zeilen gerechnet haben (z.B. + (0,5∗II)) . Beim ersten mal ist das etwas gewöhnungsbedürftig, wird aber schnell zur Routine. Dieses Verfahren kann, auf die gleiche Weiße, auf jedes Gleichungssystem, mit beliebig vielen Variablen und Gleichungen angewendet werden.