Inhaltsverzeichnis

Kurvendiskussion

Einführung

Die Kurvendiskussion hilft uns, den graphischen Verlauf einer Funktion zu erkennen. Heute nehmen uns Programme wie Funktionsplotter oder graphische Taschenrechner diese Arbeiten weitgehend ab. Aber zum Verständnis wie der Graph einer Funktion aussieht, sind Kenntnisse zur Bestimmung von Kurvenmerkmalen wichtig. Diese Merkmale sind beispielsweise das Monotonieverhalten, Nullstellen oder Extremwerte der Funktion.

Über die Kurvendiskussion werden genau diese Merkmale herausgearbeitet, und können abschließend in einer Skizze dargestellt werden.

Bevor wir Beginnen, will ich erst einen kurzen Überblick geben, was alles nötig ist um eine Kurvendiskussion durchzuführen.

1.Die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion muss gefunden werden.

2.Der Definitionsbereich muss bestimmt werden. In der Regel kommen bei Abiturprüfungen ganzrationale Funktionen vor, deren Definitionsbereich die realen Zahlen sind. Kommt aber ein gebrochen rationale Funktion (x steht im Nenner der Funktion) vor, gibt es Grenzwerte oder Polstellen die beschrieben werden sollen.

3.Das Monotonieverhalten der Funktion. (Punkt- oder Achsensymmetrie)

4.Nullstellen der Funktion (Stellen an denen der Graph die x-Achse schneidet)

5.Extremwerte der Funktion (Hoch-, Tief- und Sattelpunkte)

6. Wendepunkte

7. Das Verhalten im Unendlichen.

8.Die Skizze

Ableitungen einer Funktion

Der erste Schritt der Kurvendiskussion ist immer das Finden von Ableitungen der Funktion. (gibt immer Punkte!)

Folgende Funktion ist gegeben:	$f(x) = x^3 - 12x$
1. Ableitung	$f'(x) = 3x^2 - 12$
2.Ableitung	$f''(x) = 6x$
3. Ableitung	$f'''(x) = 6$

Monotonieverhalten der Funktion

Wenn wir von Monotonieverhalten sprechen, meinen wir, in welchen Bereichen die Funktion steigt oder fällt. In den Bereichen, in denen sie steigt, ist sie monoton steigend ansonsten ist sie monoton fallend.

Wie bekommen wir nun raus, wo eine Funktion steigt oder fällt?

Wir wissen ja bereits, dass die erste Ableitung die Tangentensteigung der Funktion angibt. Also müssen wir nur herausfinden, wo die Tangentensteigungsfunktion positiv oder negativ ist. Denn dann können wir genau die Bereiche eingrenzen in denen die Funktion f (x) steigt oder fällt.

1. Ableitung	$f'(x) = 3x^2 - 12$
3 ausgeklammert	$f'(x) = 3(x^2 - 4)$

In der Klammer sehen wir jetzt $x^2 - 4$. Die gesamte Funktion ist genau dann Null, wenn $(x^2 - 4)$ Null ergibt, denn 3 mal (0) ist ja bekanntlich Null.

Wenn also x den Wert 2 hat, ist der Funktionswert Null. Aber auch bei einem x-Wert von -2 ist der Funktionswert Null. Daraus können wir aber gleichzeitig folgern, dass links von x = -2 und rechts von x = 2 die Ableitungsfunktion positiv sein muss, und dadurch die Funktion auch monoton steigend ist. Das können wir überprüfen, indem wir verschiedene Werte in die Ableitungsfunktion einsetzen.

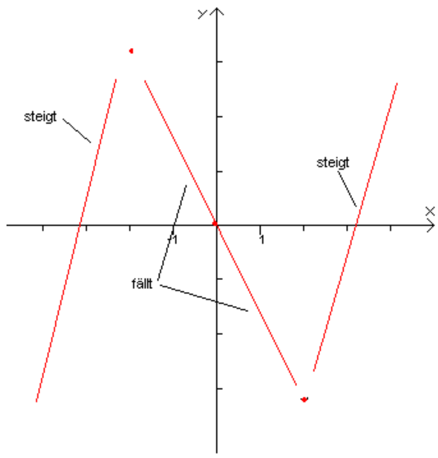
x = -3	$f'(x) = 3(-3^2 - 4) = 15$	positiv
x = -2	$f'(x) = 3(-2^2 - 4) = 0$	null
x = -1	$f'(x) = 3(-1^2 - 4) = -3$	negativ
x = 1	$f'(x) = 3(1^2 - 4) = -3$	negativ
x = 2	$f'(x) = 3(2^2 - 4) = 0$	null
x = 3	$f'(x) = 3(3^2 - 4) = 5$	positiv

Man schreibt:

f(x) = monoton steigend für $x < -2$ und $x > 2$
(f von x ist monoton steigend für x kleiner –2 und x größer 2)

f(x) = monoton fallend für $x > -2$ und $x < 2$

Rechts ist der ungefähre Verlauf der Funktion skizziert. Man bekommt hier schon einen ersten Eindruck über die Kurvenform.



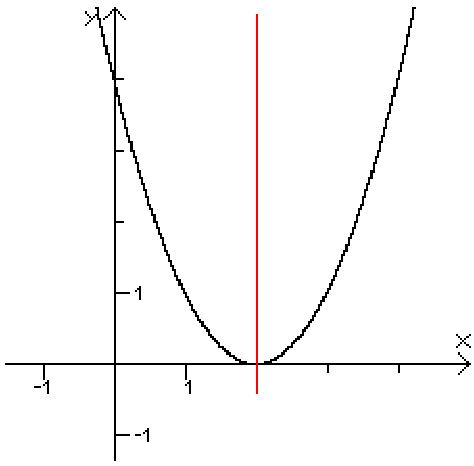
Symmetrieverhalten

Es gibt einige einfache Merkmale einer Funktion (Ganzrational), an den man klar ablesen kann, ob die Funktion Achsensymmetrisch ist. Achsensymmetrisch bedeutet hier, dass der Graph an einer Achse (x, y) gespiegelt ist.

Hat eine Funktion nur gerade Exponenten, ist sie achsensymmetrisch zur y-Achse.

Für die Punktsymmetrie gibt es auch ein Merkmal: (bei ganzrationalen Funktionen)

Hat eine Funktion nur ungerade Exponenten, ist sie punktsymmetrisch zum Ursprung.



Es gibt aber auch Funktionen, die nicht zur y-Achse symmetrisch sind, aber trotzdem eine Achsensymmetrie besitzen.

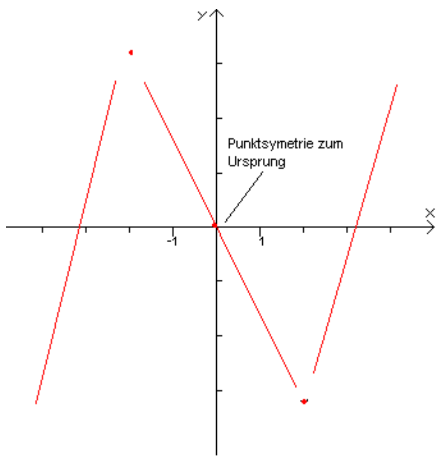
Die Nebenstehende Funktion zeigt diesen Zusammenhang an der Funktion

$f'(x) = (x-2)^2$

Wie man sieht, ist die Symmetrieachse eine senkrechte Linie, welche die x-Achse im Punkt 2 schneidet. Wie die Funktion schon zeigt wird hier von jedem x-Wert zwei abgezogen und dadurch die Funktion um zwei Punkte nach rechts verschoben. Daraus kann man aber auch den Schluss ziehen, dass die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse währe, wenn man von jedem x-Wert 2 abzieht!

Auf unsere Ausgangsfunktion bezogen gilt also:

$f(x) = x^3 - 12x$ hat nur ungerade Exponenten (x = x^1), ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.



Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion sind die Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet, also der Funktionswert null ist.

Da wir eine Funktion haben, bei der die höchste Potenz eine 3 ist, können auch maximal 3 Nullstellen auftreten. Es können aber auch weniger sein.

Erste Nullstelle

Da die Funktion nur ungerade Exponenten aufweist, wissen wir aus dem Symmetrieverhalten, dass eine Nullstelle im Ursprung des Koordinatensystems liegen muss. Also ist eine Nullstelle bei

$$\mathbf{x_1 = 0.}$$

Weitere Nullstellen

Da der Funktionswert (y-Wert) an einer Nullstelle null ist, setzen wir die Funktionsgleichung einfach zu null.

$$f(x) = x^3 - 12x$$

$$0 = x^3 - 12x$$

Die anderen Nullstellen bekommen wir durch Ausklammern von x.

$$0 = x^3 - 12x$$

$$0 = x \times (x^2 - 12)$$

Da bei einer Multiplikation das Ergebnis immer null ist, sobald ein Faktor null ist, liegt die Lösung auf der Hand. Eine Nullstelle ist $x = 0$, da der Faktor x vor der Klammer die eine Möglichkeit darstellt (Haben wir ja schon aus dem Symmetrieverhalten erkannt). Die zweite Möglichkeit, um die Multiplikation zu null werden zu lassen ist die Lösung der Klammer (x^2 - 12).

Da das eine quadratische Gleichung ist, lösen wir diese einfach mit der A-B-C Formel auf.

Unsere Komponenten sind

A=1 B=0 C=-12

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \times A \times C}}{2 \times A}$$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 \ \ - 4 \times 1 \times (-12)}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{48}}{2}$$

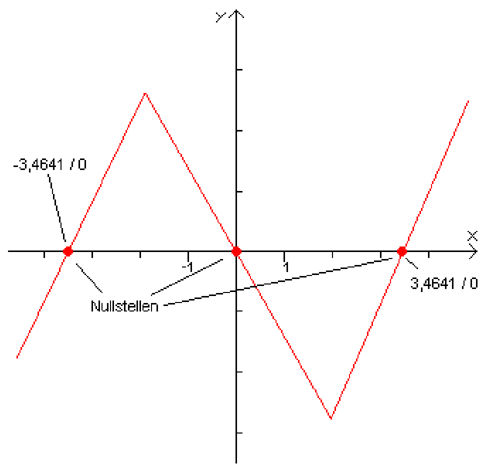
$$x_1 = \frac{0 + \sqrt{48}}{2} = 3{,}4641 \qquad x_1 = \frac{0 - \sqrt{48}}{2} = -3{,}4641$$

Die beiden anderen Lösungen sind also **x_2 = 3,4641** und **x_3 = -3,4641**

Unsere Funktion $f(x) = x^3 - 12x$ hat also drei Nullstellen und die sind.

x_1 = -3,4641
x_2 = 0
x_3 = 3,4641

Mit diesen Ergebnissen können wir unsere Funktion schon etwas genauer skizzieren.



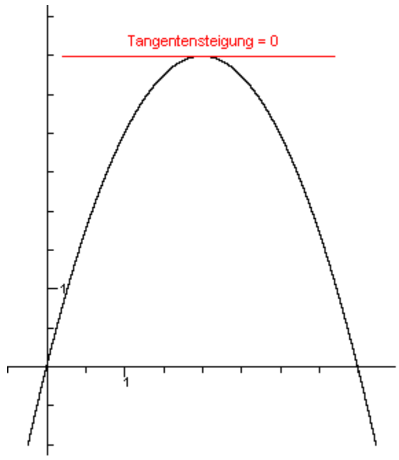
Lokale Extremwerte (Minimum, Maximum)

Unter lokalen Extremwerten versteht man die Punkte im Graph, bei denen die höchsten und tiefsten Punkte liegen. Lokal sind sie deshalb, weil wir ja nur ein beschränktes Intervall (Ausschnitt) betrachten. Links und rechts dieses Intervalls können die Funktionswerte größer oder kleiner sein.

Hochpunkte und Tiefpunkte

Eine Funktion hat dann einen Hochpunkt, wenn links und rechts keine Punkte liegen, die höher sind (logisch :-)
Das gleiche gilt analog für Tiefpunkte

Weiterhin ist die Steigung der Tangente in diesem Punkt der Funktion null (Berggipfel/Tal). Diese Bedingung für eine Extremwert bezeichnet man auch mit grundlegende Bedingung.



Grundlegende Bedingung

Da wir bereits wissen, dass die erste Ableitung einer Funktion etwas über die Tangentensteigung aussagt, müssen wir diese nur zu null setzen um Punkte zu finden die eine Tangentensteigung von Null besitzen.

Erst Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 12$

Nullsetzen $0 = 3x^2 - 12$

Hier handelt es sich wieder um eine quadratische Gleichung, die wir mit der A-B-C Formel auflösen.

A=3 B=0 C=-12

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \times A \times C}}{2 \times A}$$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 \ - 4 \times 3 \times (-12)}}{6}$$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{144}}{6}$$

$$x_1 = \frac{0 + \sqrt{144}}{6} = 2 \qquad x_1 = \frac{0 - \sqrt{144}}{6} = -2$$

Die erste Ableitung hat also zwei Nullstellen und die sind.

x_1 = -2
x_2 = 2

Wir wissen jetzt, dass unsere Funktion zwei lokale Extremwerte besitzt. Wir müssen aber noch prüfen, welcher ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt ist.

Diese Prüfung ist die sogenannte hinreichende Bedingung.

Hinreichende Bedingung

Überlegen wir, wie wir die beiden Punkte unterscheiden können. Dazu setzen wir die gefundenen Punkte in die zweite Ableitung für x ein, erhalten wir unterschiedliche Ergebnisse.

2. Ableitung $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 6 \times (-2) = -12 \qquad f''(x) = 6 \times 2 = 12$$

Negativ **Positiv**

Wir bekommen in der zweiten Ableitung einmal einen positiven und einmal einen negativen Wert.

Ein Hochpunkt in einer Funktion hat links davon immer eine positive Tangente und rechts eine Negative. Der Hochpunkt selbst hat eine Steigung von null.

Ein Tiefpunkt in einer Funktion hat links davon immer eine negative Tangente und rechts eine Positive. Der Tiefpunktpunkt selbst hat eine Steigung von null.

Da die Ableitung der Ableitung (2. Ableitung) ja ebenfalls die Tangentensteigung der ersten Ableitung angibt, muss im entsprechenden x-Wert bei einem negativer Wert in der 2. Ableitung ein lokales Maximum darstellen. Ein positiver Wert ist dann ein Minimum.

Nach dem wir also festgestellt haben wo Extremwerte liegen, müssen wir diese nur noch in die 2. Ableitung einsetzen und das Ergebnis prüfen.

Positives Ergebnis in der 2. Ableitung = lokales Minimum

Negatives Ergebnis in der 2. Ableitung = lokales Maximum

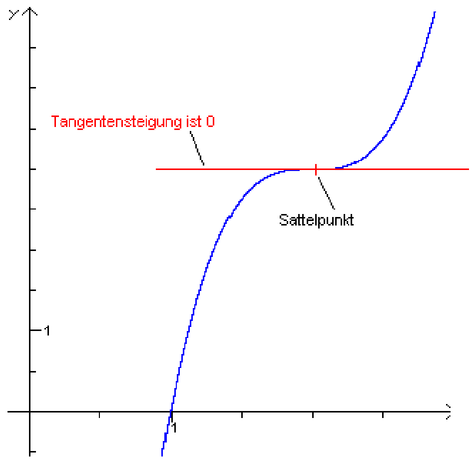
Sattelpunkte

Sattelpunkte sind die Stellen einer Funktion an denen kein Maximum oder Minimum vorliegt, aber dennoch die erste Ableitung keine Tangentensteigung hat.

Sie werden genau wie Extremwerte gesucht. Die gefundenen x-Werte ergeben in der 2. Ableitung aber als Ergebnis eine null.

Ergebnis null in der 2. Ableitung = Sattelpunkt

Wie man sieht, hat die nebenstehende Funktion weder einen Hoch- noch einen Tiefpunkt. Die Stelle an der die Tangentensteigung Null ist, liegt hier ein Sattelpunkt.



Bei unserer Funktion ergab die hinreichende Bedingung allerdings einen Hochpunkt bei x = -2 (weil in der 2. Ableitung das Ergebnis negativ war) und einen Tiefpunkt bei x = 2 (Positive 2. Ableitung)

Einsetzen in die Ursprungsgleichung

Wir setzen die gefundenen Punkte noch in die Ursprüngliche Funktion ein um die y-Werte auszurechnen.

zu x = -2 $f(x) = -2^3 - 12 \times (-2) = -8 - (-24) = 16$

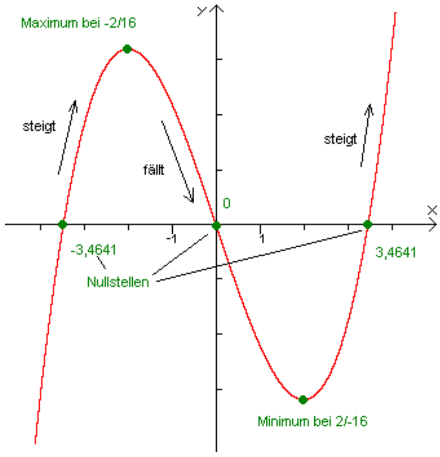
zu x = 2 $f(x) = 2^3 - 12 \times (2) = 8 - 24 = -16$

Wir haben also ein lokales Maximum bei

(-2 / 16)

und ein lokales Minimum bei

(2 / -16)

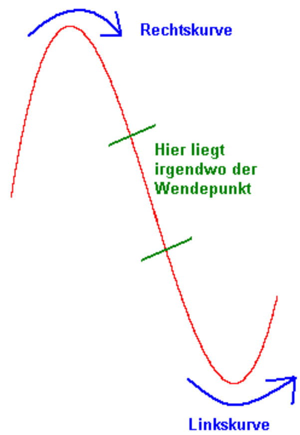


Man erkennt jetzt schon ziemlich genau den Verlauf der Funktion. Auch dass die Funktion keinen Sattelpunkt hat.

Wendepunkte

Ein Wendepunkt einer Funktion, lässt sich am einfachsten an einem anschaulichen Beispiel verdeutlichen. Stellt euch vor, ihr sitzt im Auto und fahrt auf einer Kurvenreichen Straße. Eine Rechts- und eine Linkskurve kommen direkt nacheinander.

Ihr fahrt jetzt in die Rechtskurve ein und müsst stark lenken, wenn ihr aber aus der Kurve ausfahrt, wird das Lenkrad wieder in Richtung seines Ursprungs zurück gedreht. Jetzt kommt irgendwann der Punkt, an dem die „Nullstellung“ des Lenkrades erreicht wird und ihr anfangt in die Linkskurve einzufahren.



Der Punkt zwischen den Kurven wo das Lenkrad auf seinem Ursprung steht ist ein Wendepunkt.

Wie man an der Grafik schon deutlich sieht, muss die Tangentensteigung am Wendepunkt am größten sein. Die erste Ableitung der Funktion muss hier also ein Maximum besitzen, und nach einem Maximum haben wir schon einmal gesucht.

Besitzt die erste Ableitung ein Maximum muss die zweite Ableitung genau dort eine Nullstelle haben.

1.Maximum der ersten Ableitung = Nullstelle der zweiten Ableitung

Funktion	$f(x) = x^3 - 12x$
1. Ableitung	$f'(x) = 3x^2 - 12$
2.Ableitung	$f''(x) = 6x$
3. Ableitung	$f'''(x) = 6$

Zweite Ableitung Nullsetzen

$$0 = 6x$$

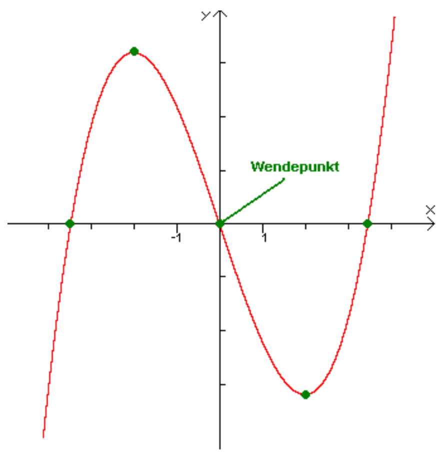
Nach x auflösen

$$x = 0$$

Wir haben also eine Nullstelle im Koordinatenursprung gefunden, müssen aber noch prüfen, ob es sich wirklich um einen Wendepunkt handelt.

Dazu müssen wir prüfen ob an der Stelle des gefundenen Punktes die 3. Ableitung ungleich Null ist (sonst wäre es ja ein Sattelpunkt)

Da die 3. Ableitung konstant 6 ist, muss im Punkt 0 / 0 ein Wendepunkt sein.

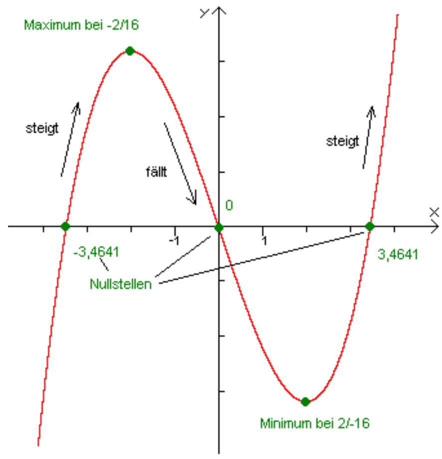


Verhalten im unendlichen

Im nebenstehenden Graphen ist der Verlauf der Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x$$

mit den gefundenen Merkmalen gezeichnet.



Das Intervall (der Ausschnitt) das wir hier sehen, ist allerdings von ca. –5 bis +5 beschränkt. Die Funktion liefert aber für alle positiven und negativen x-Werte den entsprechenden y-Wert.

Die Frage ist nun wie sich die Funktion im Unendlichen (± x) verhält.

Da das Verhalten einer Funktion immer von dem Glied abhängt, dass x in der höchsten Potenz aufweißt, hier also x^3, betrachten wir nur dieses Glied genauer.

Weiter ist klar, dass x im Nenner der Funktion nicht vorkommt und dadurch weder eine Polstelle noch ein Grenzwert vorliegt.

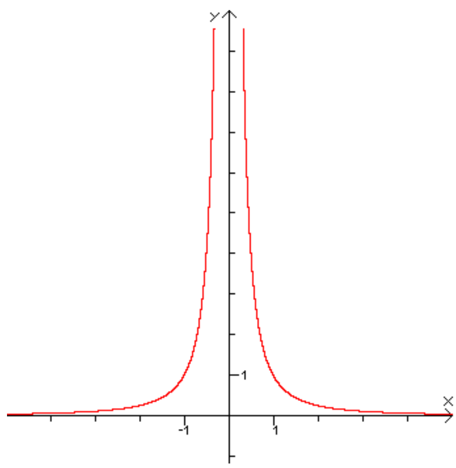
Durch x^3 ist also ganz klar zu erkennen, dass bei großen x-Werten auch große y-Werte als Ergebnis auftauchen. Im positiven Bereich strebt die Funktion also gegen plus unendlich und im negativen x-Bereich gegen minus unendlich. (minus mal minus mal minus = minus)

Man sagt die Funktion divergiert

Andere Beispiele

Betrachten wir die einfache Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



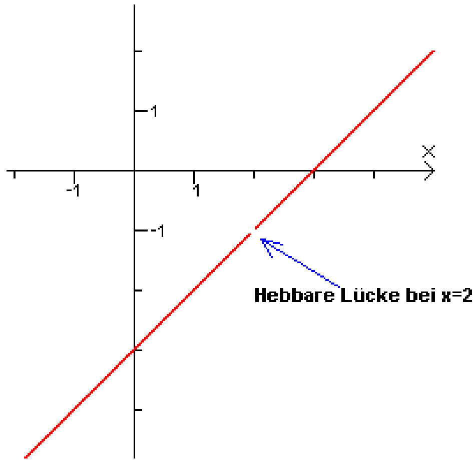
Hier kann man deutlich sehen, dass bei steigenden x-Werten der Funktionswert immer kleiner wird und durch x^2 im positiven und im negativen. (minus mal minus = plus)

Man sagt, die Funktion konvergiert im unendlichen gegen Null.

Im Koordinatenursprung dagegen weißt die Funktion ein anderes Verhalten auf. Der Funktionswert wird bei immer kleineren x-Werten immer größer, erreicht aber nie die y-Achse.

Man sagt die x- und die y-Achse sind Asymptote

Gebrochen-rationale Funktionen



Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

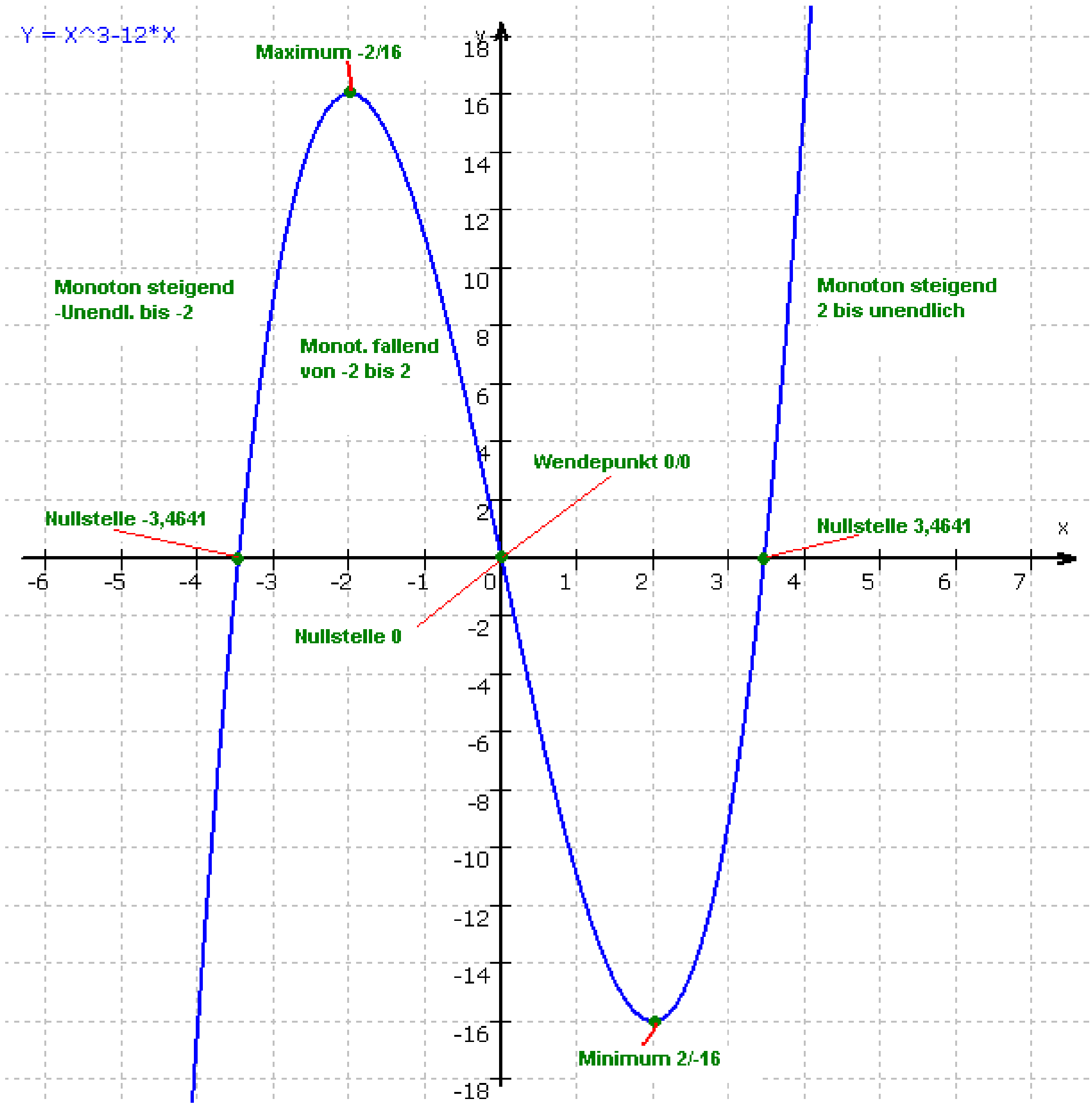
hat im Nenner x stehen. Überlegen wir wie sich die Funktionsgleichung verhält wenn x den Wert 2 hat.

$$f(x) = \frac{2^2 - 10 + 6}{0}$$

Wir teilen durch Null, und das ist bekanntlich nicht definiert. Also hat die Funktion an dieser Stelle eine Lücke. Die Funktion nähert sich von beiden Seiten dem Grenzwert von –1, erreicht ihn aber nicht. Kann man in diese Lücke einen Grenzwert, hier –1, einsetzen, sagt man die Lücke ist hebbar.

Skizze

Abschließend wird die Funktion noch (am besten auf Millimeterpapier) gezeichnet, und alle gefundenen Merkmale beschriftet.



Beispiel einer Abiturprüfung

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x-2) \times (x^2 + 6x + 9) \qquad (x \in IR)$$

Diskutieren sie die Funktion auf folgende Punkte:

a: Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion.
b: Berechnen Sie die Nullpunkte.
c: Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.
d: Berechnen sie die lokalen Extrempunkte.
e: Bestimmen Sie den Wendepunkt.
f: Berechnen Sie den Winkel der Wendetangente.
g: Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\ unendlich$
h: Skizzieren sie den Graphen.

a: Ableitungen

Die Funktion $f(x) = (x-2) \times (x^2 + 6x + 9)$ kann zwar in dieser Form mit der Produktregel abgeleitet werden, aber die 2. und 3. Ableitung werden dann sehr komplex. Der bessere Weg ist es, die Funktion zuerst in die Normalform zu bringen, in dem die Klammern ausmultipliziert werden.

$$f(x) = (x-2) \times (x^2 + 6x + 9)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x^2 - 12x + 9x - 18$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

Jetzt ist es sehr einfach mit der Potenzregel die Ableitungen zu finden

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

$$f''(x) = 6x + 8$$

$$f'''(x) = 6$$

b: Nullpunkte

Die Nullpunkte wiederum findet man mit der Form $f(x) = (x-2) \times (x^2 + 6x + 9)$ sehr einfach.

Zuerst wird die Funktion nullgesetzt.

$$0 = (x-2) \times (x^2 + 6x + 9)$$

Wie man jetzt leicht erkennt, wird das Ergebnis der Gleichung dann null, wenn die erste oder die zweite Klammer null ist.

Für die erste Klammer gilt: $(x-2) = 0$ wenn x zwei ist.
Also ist die erste Nullstelle x = 2

Für die zweite Klammer $(x^2 + 6x + 9)$ gibt es zwei Lösungen, da es sich um eine quadratische Gleichung handelt.

Die Komponenten sind

A=1 B=6 C=9

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \times A \times C}}{2 \times A}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+0}{2} = -3 \qquad x_1 = \frac{-6-0}{2} = -3$$

Die beiden anderen Lösungen sind also **x_2 = -3** und **x_3 = -3**
Es handelt sich hier um eine doppelte Nullstelle. Das bedeutet, dass die Funktion die x-Achse im Punkt (–3/0) nur berührt.

Die Nullstellen sind also bei x_1 = 2 und x_2 = -3

c: Schnittpunkt mit der y-Achse

Die Stelle, an der die Funktion die Ordinatenachse schneidet, hat ein besonderes Merkmal:

$$x = 0$$

Also setzten wir in die Funktion für x den Wert 0 ein und lösen sie auf.

$$f(x) = (x-2)\times(x^2+6x+9)$$

$$f(0) = (0-2)\times(0^2+0\times x+9)$$

$$f(0) = (-2)\times(9)$$

$$f(0) = -18$$

Der Punkt in dem die Funktion die y-Achse schneidet ist in (0/-18)

d: lokale Extrempunkte

Erste Ableitung Nullsetzen (Grundlegende Bedingung)

$$f'(x) = 3x^2+8x-3$$

$$0 = 3x^2+8x-3$$

Quadratische Gleichung auflösen

A=3 B=8 C=-3

$$x_{1/2} = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4\times A\times C}}{2\times A}$$

$$x_{1/2} = \frac{-8\pm\sqrt{(8)^2-4\times 3\times(-3)}}{6}$$

$$x_{1/2} = \frac{-8\pm\sqrt{100}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_1 = \frac{-8-10}{6} = -3$$

Die Funktion hat also zwei lokale Extrempunkte bei $x_1 = 1/3$ und $x_2 = -3$

Die gefundenen Werte in die 2. Ableitung einsetzen (Hinreichende Bedingung)

$$f''(x) = 6x+8$$

$$f''(x) = 6 \times \frac{1}{3} + 8 \qquad f''(x) = 6 \times (-3) + 8$$

$$f''(x) = 10 \qquad f''(x) = -10$$

positiv — negativ

In der 2. Ableitung ist das Ergebnis im Punkt **x = 1/3 positiv = Minimum**

In der 2. Ableitung ist das Ergebnis im Punkt **x = -3 negativ = Maximum**

Die 2 Koordinate der Maxima bestimmen

Einsetzen der gefundenen Werte in die Funktion
(Wir nehmen hier wieder die Normalform)

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

$$f(x) = (\frac{1}{3})^3 + 4 \times (\frac{1}{3})^2 - 3(\frac{1}{3}) - 18 \qquad f(x) = (-3)^3 + 4 \times (-3)^2 - 3 \times (-3) - 18$$

$$f(x) = (\frac{1}{27}) + 4 \times (\frac{1}{9}) - 3(\frac{1}{3}) - 18 \qquad f(x) = (-27) + 4 \times 9 - 3 \times (-3) - 18$$

$$f(x) = (\frac{1}{27}) + (\frac{12}{27}) - 19 \qquad f(x) = (-27) + 4 \times 9 - 3 \times (-3) - 18$$

$$f(x) = -18{,}5185 \qquad f(x) = 0$$

Es gibt also ein lokales Minimum beim Punkt (⅓/-18,5185) und ein lokales Maximum bei (-3/0).

e: Wendepunkt

Die Wendepunkte einer Funktion haben bekanntlich die größte Tangentensteigung und zeigen sich darum in einem Maximum in der ersten Ableitung.

Wir prüfen also die erste Ableitung auf Maximum.

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

die zweite Ableitung hat an dieser Stelle eine Nullstelle:

$$f''(x) = 6x + 8$$

$$0 = 6x + 8$$

$$-8 = 6x$$

$$-\frac{8}{6} = x = -1{,}333$$

Die Nullstelle liegt also bei **x = -1⅓**

Da die dritte Ableitung konstant ist ($f'''(x) = 6$), handelt es sich tatsächlich um ein Maximum in der ersten Ableitung, und damit um einen Wendepunkt.

Den gefundenen x-Wert setzen wir in die Funktion ein, um die y-Koordinate auszurechnen.

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

$$y = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 4 \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 18$$

$$y = -9{,}2593$$

Die Koordinaten des Wendepunktes liegen also bei (-1⅓/-9,2593)

f: Steigungswinkel der Wendetangente

Die Steigung der Wendetangente ist die Steigung im Wendepunkt, die wir durch einsetzen des x-Wertes des Wendepunktes in die erste Ableitung ausrechnen.

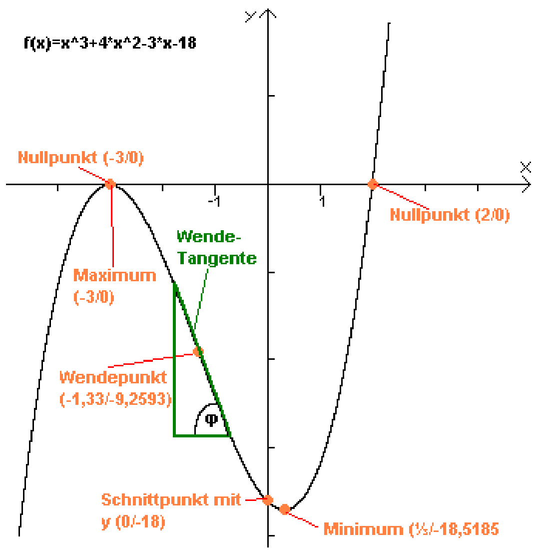
$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

$$f'(x) = 3 \times \left(-1\frac{1}{3}\right)^2 + 8 \times \left(-1\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$f'(x) = -8\frac{1}{3}$$

Wir haben also eine negative Steigung von 8,33. Negative Steigung bedeutet, dass die Tangente von oben links nach unten rechts verläuft.

Um uns ein besseres Bild machen zu können, fertigen wir uns eine Skizze der bereits gefundenen Punkte des Graphen an.



Das grüne Steigungsdreieck hat als Hypotenuse die gesuchte Wendetangente und deren Steigung beträgt –8,33. Da die Steigung als Verhältnis zwischen y/x definiert ist, setzen wir x zu 1 und y zu 8,33. Der Winkel φ im Steigungsdreieck ist dann:

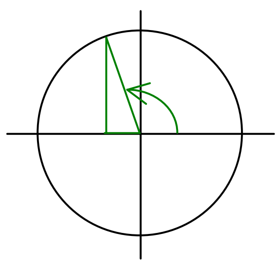
$$\tan\varphi = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{8{,}33}{1} = 8{,}33$$

Der Tangens des Winkels φ entspricht dem Betrag der Steigung.

Zum Tangens φ rechnen wir noch den Winkel aus:

$$\varphi = \tan^{-1} 8{,}33 = 83{,}15°$$

Um auch mathematisch richtig den Winkel anzugeben, müssen wir allerdings beim mathematischen Nullpunkt beginnen, den Winkel zu messen.



Wir ziehen also die 83,15° noch von 180° ab und erhalten 96,85° .

g: Verhalten im Unendlichen

Da es sich bei der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$ um eine ganzrationale Funktion 3. Grades handelt, die in der höchsten Potenz positiv ist, kommt die Funktion von links unten und geht nach oben rechts weg.

Da für die Funktion kein Grenzwert in Frage kommt, ist ihr Verhalten:

Für x gegen $-\infty \Rightarrow f(x) = -\infty$

Für x gegen $+\infty \Rightarrow f(x) = +\infty$

h: Skizze