Inhaltsverzeichnis

Die Integralrechnung

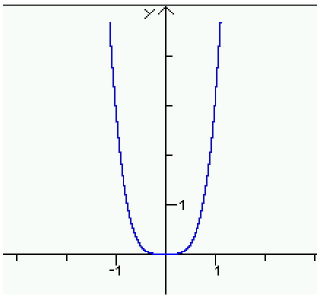
Die Stammfunktion

Integrieren ist die Umkehrung vom differenzieren!

Um die Fläche unter einer Funktion bis zur x-Achse zu errechnen, benötigt man die Stammfunktion einer Ausgangsfunktion.

Ausgangsfunktion

$$\boxed{f(x) = 3 \times x^4}$$



Die Stammfunktion der Ausgangsfunktion, ist die Funktion deren 1. Ableitung die Ausgangsfunktion ergibt.
Oder anders gesagt: leitet man die Stammfunktion ab, ergibt sich die Ausgangsfunktion

Wie kommt man zur Stammfunktion (am Beispiel der Potenzfunktion)

1.Schritt: Der Exponent wird um 1 erhöht.
2. Schritt: Der neue Exponent ist als Nenner zur Potenz zuzufügen.
3. Schritt: Die Konstante „c“ die beim differenzieren wegfällt, muss wieder zur Stammfunktion dazu. (c kann jede natürliche Zahl sein. Darum gibt es unendlich viele Stammfunktionen)
4.Schritt: Die Stammfunktion wird durch F(x) dargestellt.
5.Schritt: Leitet man die Stammfunktion wieder ab, muss die Ursprungsfunktion rauskommen.

$$\boxed{F(x) = \frac{a \times x^{n+1}}{n+1} + c}$$

$$\boxed{f(x) = 3 \times x^4}$$

$$\Downarrow$$

Stammfunktion =

$$\boxed{F(x) = \frac{3 \times x^5}{5} + 4}$$

1.Ableitung der Stammfunktion = $F'(x) = \frac{3 \times 5 \times x^4}{5} = 3 \times x^4$ = Ausgangsfunktion

Beispiele für Stammfunktionen:

$\boxed{f(x) = \sin(x)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F(x) = -\cos(x) + c}$

$\boxed{f(x) = 7 \times x^7}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F(x) = \frac{7 \times x^8}{8} + c}$

$\boxed{f(x) = 5 \times x^4 + 0{,}25 \times x^3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F(x) = \frac{5 \times x^5}{5} + \frac{1 \times x^4}{4 \times 4} + c = x^5 + \frac{1}{16} \times x^4 + c}$

Beispiele mit Wurzelfunktionen

$$\boxed{f(x) = 4 \times \sqrt{x}}$$ Die Wurzel in eine Potenz verwandeln. $$\boxed{f(x) = 4 \times x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f(x) = 4 \times x^{\frac{1}{2}}}$$ Exponent erweitern und teilen $$\boxed{f(x) = \frac{4 \times x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{4 \times x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}$$ Kürzen und zurück zur Wurzel $$\boxed{F(x) = \frac{8}{3} \times \sqrt[2]{x^3} + c}$$

Beispiele für die Wurzel im Nenner

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}}$$ Die Wurzel in eine Potenz verwandeln. $$\boxed{f(x) = 2 \times x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f(x) = 2 \times x^{-\frac{1}{2}}}$$ Exponent erweitern und teilen $$\boxed{f(x) = \frac{2 \times x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2 \times x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}}$$ Kürzen und zurück zur Wurzel $$\boxed{f(x) = 4 \times \sqrt{x} + c}$$

Stammfunktion von 1/x

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}}$$ $$\boxed{F(x) = \ln(x) + c}$$

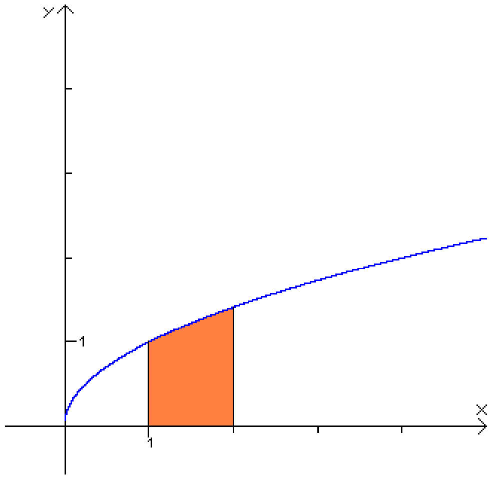
1/x ist zwar gleich x^{-1}, aber mit der Regel für Potenzen von oben käme ein falsches Ergebnis raus, nämlich:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{0} x^0 + c}$$

Selbst wenn man die Division durch Null „übersieht“, entspricht x^0 immer 1 also einer Konstanten die beim Ableiten wieder wegfallen würde.
Da wir aus der Differentialrechnung aber wissen, dass die Ableitung von f(x)=ln(x) - f'(x)=1/x ist, und die Integration genau das Gegenteil vom Ableiten ist, kennen wir die Lösung.

Wie berechnet man nun aus der Stammfunktion die Fläche unter einer Funktion?

$$f(x) = \sqrt{x}$$



Von der Funktion rechts, soll die Fläche im Intervall von 1 bis 2 errechnet werden (orange Fläche).

1.Die Stammfunktion suchen

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}}$$

2.Mit dem Integral die Fläche errechnen

$$\int_1^2 (\sqrt{x})dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{(2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} = \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} = 1{,}219$$

<u>Die Fläche im Intervall von 1 bis 2 ist 1,219 groß.</u>

Erklärung:

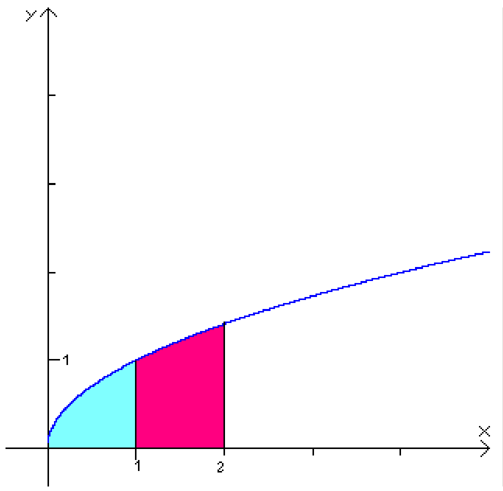
$\int_1^2 (\sqrt{x})dx$ Gesprochen: Integral von 1 bis 2 über f von x dx.

- Das Integralzeichen ist eine Erweiterung des Summenzeichens Σ mit den Intervallgrenzen. (hier von 1 bis 2)
- dx bedeutet, dass die Anzahl der Rechtecke unter der Funktion, deren Breite eigentlich Δx ist unendlich hoch ist. Da die Breite dann gegen 0 geht spricht man von dx.
- Dazwischen steht die Randfunktion f(x). (hier √x)

$\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2$ Ist die Stammfunktion von f(x) in eckigen Klammern mit den Intervallgrenzen.

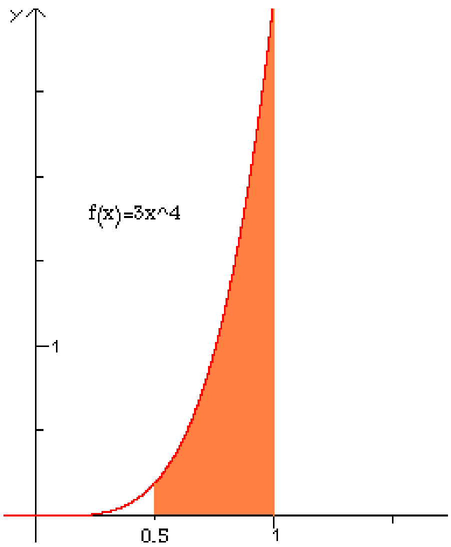
- Setzt man nun in die Stammfunktion für x die größere Intervallgrenze (hier 2) ein, erhält man die Fläche von 0 bis 2 unter der Randfunktion (blau und rot zusammen).
- Setzt man die linke Grenze (hier 1) ein erhält man die Fläche von 0 bis 1 (blaue Fläche).
- Man muss nun nur noch von der großen Fläche die kleine abziehen und erhält die Fläche zwischen 1 und 2 (rote Fläche)

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} = \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} = 1{,}219$$



Beispiel 2 zur Flächenberechnung

$$f(x) = 3 \times x^4$$



Berechne die Fläche im Intervall von 0,5 bis 1 (orange Fläche).

1.Die Stammfunktion suchen

$\boxed{f(x) = 3 \times x^4}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{F(x) = \frac{3}{5} \times x^5 + c}$

2.Mit dem Integral die Fläche errechnen

$$\int_{0,5}^{1} (3x^4)dx = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_{0,5}^{1} = \frac{3}{5} \times 1^5 - \frac{3}{5} \times 0{,}5^5 = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times 0{,}03125 = 0{,}58$$

<u>Die Fläche im Intervall von 0,5 bis 1 ist 0,58 groß.</u>

Vertauschen der Integrationsgrenzen

Soll die Fläche unter einer Funktion in einem Intervall gesucht werden bei dem die obere Grenze kleiner ist als die Untere gilt der Satz:

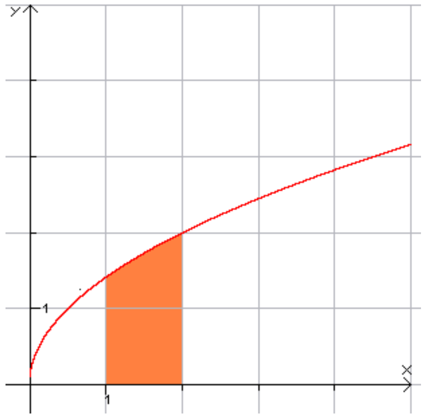
$$\int_a^b = -\int_b^a$$

Man tauscht also einfach die Grenzen und negiert das Integral.

Die Stammfunktion bei Verketteten Funktionen

(Wenn die innere Ableitung eine Konstante ist)

$$f(x) = \sqrt{2 \times x}$$



Gesucht ist die Fläche von 1 bis 2. (orange Fläche).
Die Stammfunktion muss aus der äußeren Funktion gebildet und dann noch durch die Ableitung der inneren geteilt werden.

Innere Ableitung = 2

1.Die Stammfunktion suchen

$$\boxed{f(x) = \sqrt{2 \times x}} \Longrightarrow \boxed{F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(2x)^3} + c}$$

2.durch die innere Ableitung teilen (2)

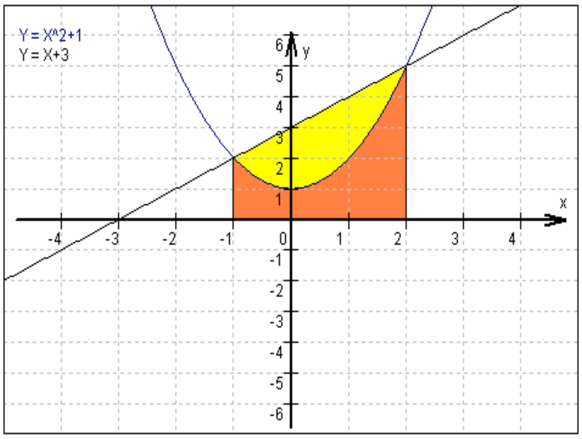
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{(2x)^3} + c = \frac{2}{6}\sqrt{(2x)^3} + c}$$

3. Mit dem Integral die Fläche ausrechnen.

$$\int_1^2 \sqrt{2x}dx = \left[\frac{2}{6}\sqrt{(2x)^3}\right]_1^2 = \frac{2}{6}\sqrt{(4)^3} - \frac{2}{6}\sqrt{(2)^3} = \frac{2}{6}\sqrt{64} - \frac{2}{6}\sqrt{8} = 1{,}724$$

<u>Die Fläche von 1 bis 2 ist 1,724</u>

Die Fläche zwischen zwei Funktionen



Angenommen wir haben zwei Funktionen.

1. $f(x) = x + 3$
2. $g(x) = x^2 + 1$

Zwischen diesen Funktionen gibt es eine Fläche (gelb), die es zu berechnen gilt.

Hier nun die Vorgehensweise:

Schritt 1:
Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Funktionen, in dem wir die Funktionen gleichsetzen.

$$x^2 + 1 = x + 3$$

Dann bringen wir alles auf eine Seite, um so eine quadratische Gleichung zu bekommen.
Diese Funktion nennt man Differenzfunktion.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind: $x_1 = -1$ $x_2 = 2$
Und das sind auch die Integrationsgrenzen unserer Aufgabe.

Schritt 2:
Nun berechnen wir die Fläche unter g(x) (orange) und ziehen sie von der Fläche unter f(x) (gelb plus orange) ab.

Fläche 1 = $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

Fläche 2 = $\int_{-1}^{2} g(x)dx$

$$A = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Wobei f(x) – g(x) genau die Differenzfunktion von oben ist.

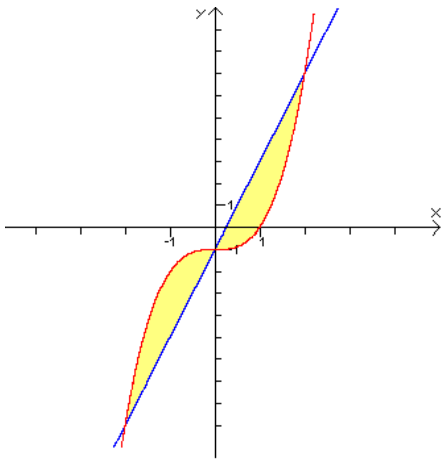
Also ist die Fläche:

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = -4{,}5$$

Das Ergebnis ist zwar negativ, ist aber dennoch richtig. Das liegt an der Tatsache, dass wir oben die Differenzfunktion zufällig gebildet haben. Hätten wir alles auf die rechte Seite gebracht und mit dieser Funktion weiter gerechnet, käme +4,5 raus.
Also einfach den Betrag bilden !

Die Fläche zwischen den Funktionen ist also 4,5

Beispiel für die Fläche zwischen 2 Funktionen



Die zwei Funktionen sind jetzt

1. $f(x) = x^3 - 1$ (rote Kurve)
2. $g(x) = 4x - 1$ (blaue Kurve)

Zwischen diesen Funktionen gibt es eine Fläche (gelb), die es zu berechnen gilt.

Schritt 1:
Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Funktionen, in dem wir die Funktionen gleichsetzen.

$$x^3 - 1 = 4x - 1$$

Wieder bringen wir alles auf eine Seite, und bekommen dadurch eine Funktion 3. Grades.
Das ist unsere Differenzfunktion.

$$x^3 - 4x = 0$$

Als nächstes klammern wir x aus und erhalten

$$x \times (x^2 - 4) = 0$$

Da die Gleichung 0 ist, wenn x oder der Klammerausdruck 0 ist
Ist eine Nullstelle $\mathbf{x_1=0}$

Der Rest ist wieder eine Quadratische Gleichung.

$$x^2 - 4 = 0$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind: $\mathbf{x_2 = -2,\ x_3 = 2}$

Also sind die Integrationsgrenzen unserer Aufgabe.

X1=-2 X_2=0 X_3=2

Schritt 2:
Die Aufgabe muss nun in zwei Teile gegliedert werden, weil ein Teil der Fläche links der Y-Achse und ein Teil rechts davon liegt. Wir rechnen also erst von **–2 bis 0** und dann von **0 bis 2** und bilden aber gleich die Beträge der Integrale um zur Gesamtfläche zu kommen.

Die Differenzfunktion ist $x^3 - 4x = 0$

Wir müssen also die zwei Teilflächen, die jeweils als ein Integral angesehen werden können, addieren.

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx\right|$$

Die beiden Integrale links und rechts der Y-Achse werden mit ihren Beträgen addiert!

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$= \left|[0 - (4 - 8]\right| + \left|[4 - 8 - (0)]\right| = |4| + |-4| = 8$$

Die Fläche zwischen den Funktionen ist also 8

Beispiel für die Fläche zwischen Funktionen und Tangente

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$$

und der Tangente im Punkt 0/0, im Intervall 0 bis zum nächsten Berührpunkt der Tangente und der Funktion.

Schritt 1: Bestimmen der Tangentenfunktion

Die Steigung der Tangente wird durch die erste Ableitung im Punkt 0/0 bestimmt.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$$

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Einsetzen des Punktes x = 0

$$f'(x) = -0^2 + 0 \cdot x - 5$$

$$f'(x) = -5$$

Die Steigung der Tangente im Punkt 0/0 beträgt also –5

Weil eine Tangente eine Gerade ist, gilt für sie die allgemeine Geradengleichung

$$f(x) = m \cdot x + c$$

$$f(x) = -5 \cdot x$$

Da die Tangente durch den Ursprung (0,0) geht, hat sie eine Steigung von –5 und keinen Achsenabschnitt c.

Schritt 2: Den nächsten Berührpunkt bestimmen.

Durch Gleichsetzen der Funktion und der Tangente und Auflösen nach 0, können die Kreuzungspunkte bestimmt werden.

$$-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = -5x \quad \Big| +5$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 = 0$$

Da ein Berührpunkt der Tangente und der Funktion im Punkt 0/0 liegt, vereinfachen wir die Funktion durch Polynomdivision durch den Linearfaktor (x-0)

$$-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 : (x-0) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x$$

$-\frac{1}{3}x^2 + 3x$ ist eine quadratische Funktion, die wir mit der ABC-Formel auflösen.

A = -1/3 B = 3 C = 0

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \times A \times C}}{2 \times A}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4 \times (-\frac{1}{3}) \times 0}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3+3}{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4 \times (-\frac{1}{3}) \times 0}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3-3}{-\frac{2}{3}} = 9$$

Die Funktion hat also die Nullstellen 0 und 9, wobei 0 eine doppelte Nullstelle ist.
Daraus schließen wir, dass der nächste Berührpunkt der Funktion und der Tangente bei 9 liegt.

Also liegt die zu Integrierende Fläche zwischen 0 und 9

Schritt 3: Nullstellen der Funktion bestimmen

Eine Nullstelle der Funktion ist offensichtlich. Da sie kein Absolutglied besitzt, ist die erste Nullstelle im Ursprung.

Wir führen wieder eine Polynomdivision durch:

$$-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x : (x-0) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 5$$

$-\frac{1}{3}x^2 + 3x - 5$ ist wieder eine quadratische Funktion mit

A = -1/3 B = 3 C = -5

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \times A \times C}}{2 \times A}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4 \times (-\frac{1}{3}) \times (-5)}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 6\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3 + \sqrt{2\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3}} = 2{,}209$$

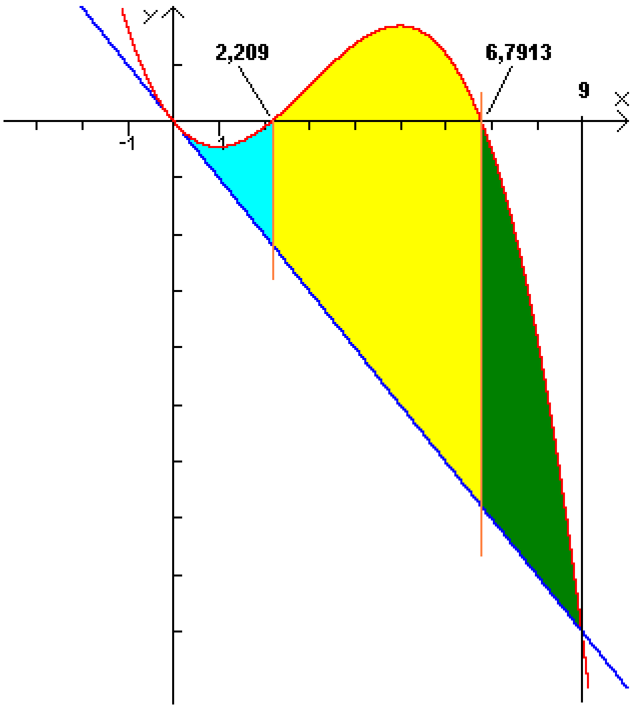
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4 \times (-\frac{1}{3}) \times (-5)}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3 - \sqrt{9 - 6\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3 - \sqrt{2\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3}} = 6{,}7913$$

Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ hat also die Nullstellen

$x_1=0$,

x_2=2,209,
x_3=6,7913

Machen wir eine Skizze mit der Tangente



Schritt 4: Integrieren

Da wir nicht über Nullstellen hinweg integrieren dürfen, müssen wir drei Integrale mit den Intervallen:

0 bis 2,209
2,209 bis 6,7913
6,7913 bis 9

Und weil wir zwischen zwei Funktionen Integrieren bilden wir die Differenzfunktion von:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \text{ und } f(x) = -5 \cdot x$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - (-5x)$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2$$

Die Stammfunktion von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2$ ist $F(x) = -\frac{1}{12}x^4 + x^3$

Also lösen wir drei Integrale:

1. $\int_0^{2,209} -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 dx = \left| -\frac{1}{12}x^4 + x^3 \right|_0^{2,209}$

2. $\int_{2,209}^{6,7913} -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 dx = \left| -\frac{1}{12}x^4 + x^3 \right|_{2,209}^{6,7913}$

3. $$\int_{6,7913}^{9} -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 dx = \left| -\frac{1}{12}x^4 + x^3 \right|_{6,7913}^{9}$$

1.

$$\int_{0}^{2,209} -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 dx = \left| -\frac{1}{12}x^4 + x^3 \right|_{0}^{2,209}$$
$$= (-\frac{1}{12}2{,}209^4 + 2{,}209^3) - (-\frac{1}{12}0^4 + 0^3)$$
$$= (-1{,}984 + 10{,}779) - 0$$
$$= 8{,}79 FE$$

2.

$$\int_{2,209}^{6,7913} -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 dx = \left| -\frac{1}{12}x^4 + x^3 \right|_{2,209}^{6,7913}$$
$$= (-\frac{1}{12}6{,}7913^4 + 6{,}7913^3) - (-\frac{1}{12}2{,}209^4 + 2{,}209^3)$$
$$= (-177{,}268 + 313{,}227) - 8{,}79$$
$$= 127{,}169 FE$$

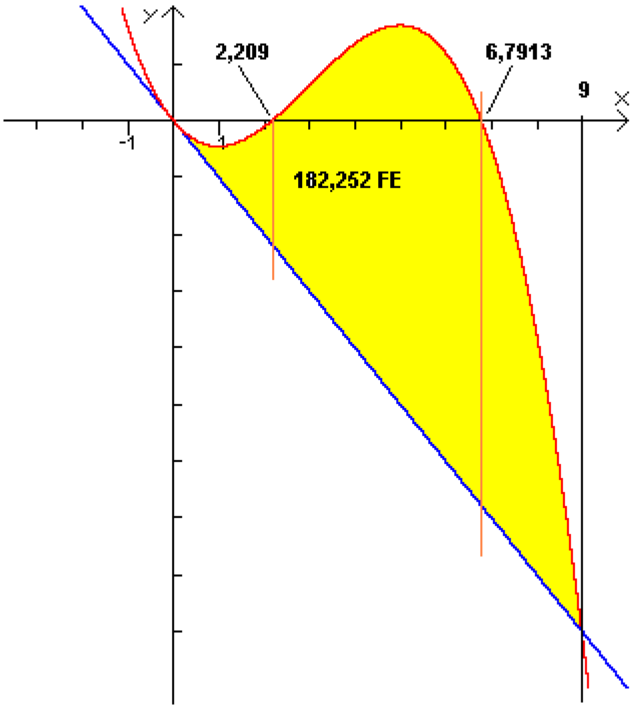
3.

$$\int_{6,7913}^{9} -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 dx = \left| -\frac{1}{12}x^4 + x^3 \right|_{6,7913}^{9}$$
$$= (-\frac{1}{12}9^4 + 9^3) - (-\frac{1}{12}6{,}7913^4 + 6{,}7913^3)$$
$$= (-546{,}75 + 729) - (-177{,}27 + 313{,}227)$$
$$= 46{,}293 FE$$

Schritt 5: Beträge addieren

8,79
127,169
46,293
182,252 FE

Die Fläche zwischen der Funktion und der Tangente im Intervall [0,9] **beträgt 182,252 Flächeneinheiten**


y
x
2,209
6,7913
9
-1
1
182,252 FE

Berechnen von Rotationskörpern

Nachdem wir nun wissen wie man Flächen zwischen Funktionen errechnen kann, gehen wir zum nächsten Schritt über: **Dem Volumen von Rotationskörpern.**

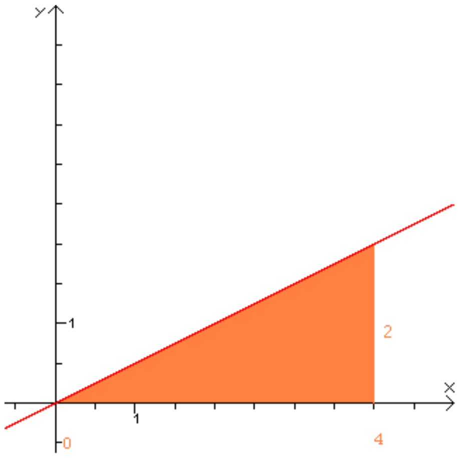
Was ist ein Rotationskörper?

Stellen wir uns eine Fläche vor die um die X-Achse rotiert und dabei einen Körper ergibt. Fangen wir **einfach** an:

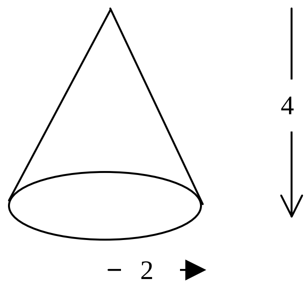
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$

Wir wissen, dass die Funktion eine Ursprungsgerade mit einer Steigung von 0,5 ist.

Jetzt stellen wir uns vor, die Fläche der Funktion, im Intervall von 0 bis 4, rotiert um die X-Achse. Es entsteht ein Kegel mit dem Radius 2 und der Höhe 4.



Der Körper sieht etwa so aus:



Die Formel für die Volumenberechnung, die wir alle kennen, ist ja bekanntlich:

$$V = \frac{1}{3} \times r^2 \times \Pi \times h = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3{,}14 \times 4 = 16{,}755$$

Volumenberechnung mit der Integralrechnung

Man kann sich jetzt natürlich fragen warum man dafür die Integralrechnung benötig, wenn es doch auch einfacher geht. Der Grund ist der, dass die **Randfunktion** natürlich wieder jede **beliebige Form** annehmen kann.
Die Herleitung der Integralformel zur Volumenberechnung von Rotationskörpern spare ich mir. (mal wieder) Wer sich dafür interessiert kann ja in ein gutes Mathebuch schauen.

$$\boxed{V = \Pi \times \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

Man setzt einfach die Funktion ins Quadrat und Multipliziert das Integral mit Pi.

Für unser Beispiel gilt also:

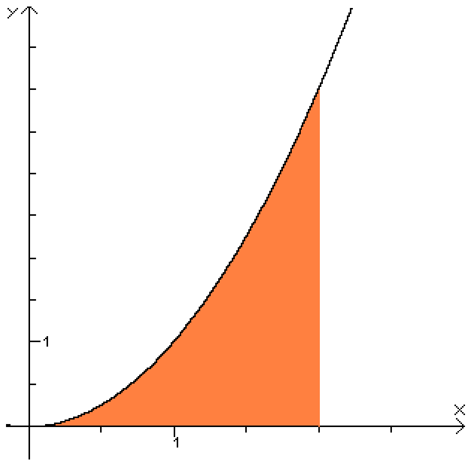
$$V = \Pi \times \int_0^4 (\frac{1}{2}x)^2 dx = \Pi \times \int_0^4 (\frac{1^2}{2^2}x^2)dx = \Pi \times \int_0^4 (\frac{1}{4}x^2)$$

$$V = \Pi \times \int_0^4 (\frac{1}{4}x^2) = \Pi \times \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = \Pi \times \left[\frac{1}{12} \times 4^3 - (0)\right] = 16{,}755 VE$$

Das Ergebnis stimmt!

Weiteres Beispiel mit einer anderen Funktion

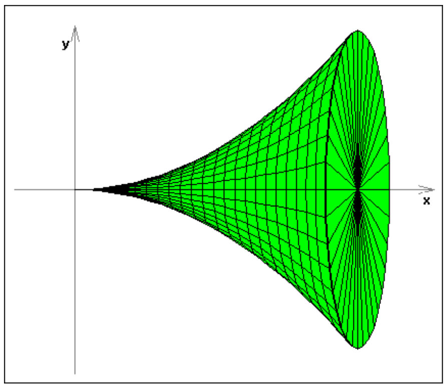
Gegeben sei: $f(x) = x^2$
Gesucht ist das Volumen des Rotationskörpers von 0 bis 2.



$$V = \Pi \times \int_0^2 (x^2)^2 = \Pi \times \int_0^2 x^4 = \Pi \times \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 =$$

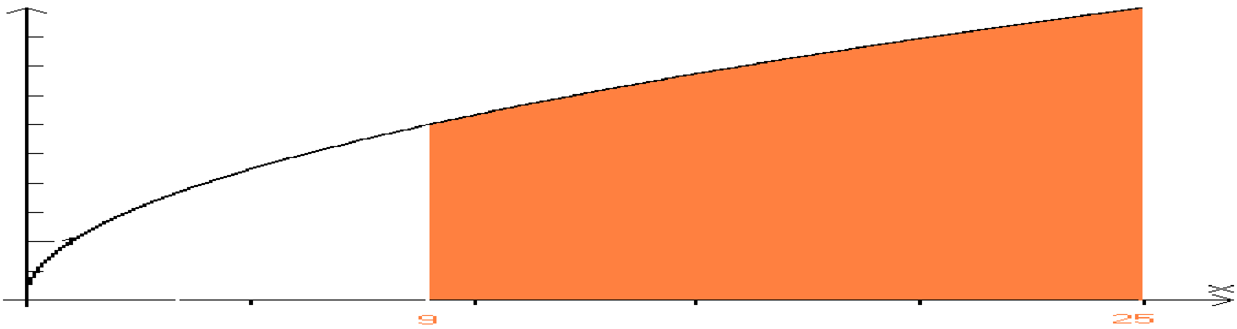
$$= \Pi \times \left[\frac{2^5}{5} - 0\right] = 20{,}1062 VE$$

Der Körper sieht so aus:



<u>Das Volumen eines Bechers</u>

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$



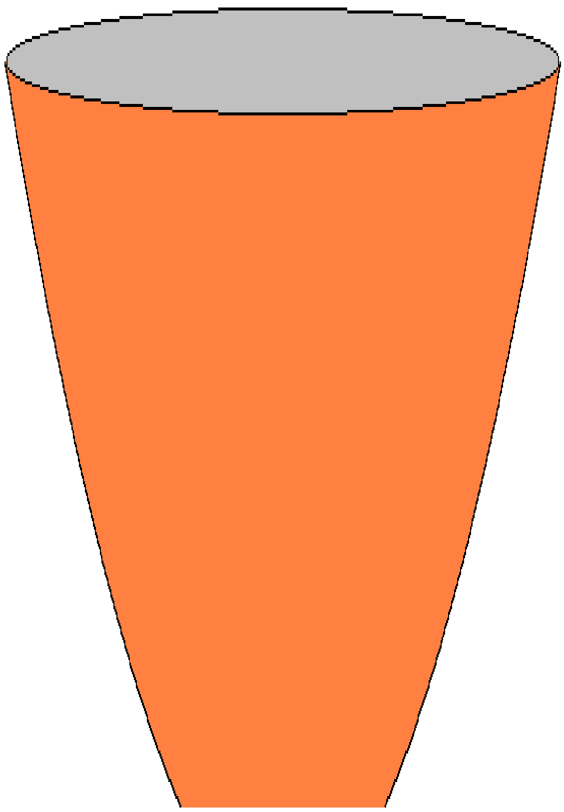
Gesucht ist das Volumen des Rotationskörpers von 9 bis 25.

$$V = \Pi \times \int_{9}^{25} (\sqrt{x})^2 = \Pi \times \int_{9}^{25} x = \Pi \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_{9}^{25} =$$

$$= \Pi \times \left[\frac{25^2}{2} - \frac{9^2}{2} \right] = \Pi \times [312{,}5 - 40{,}5] =$$

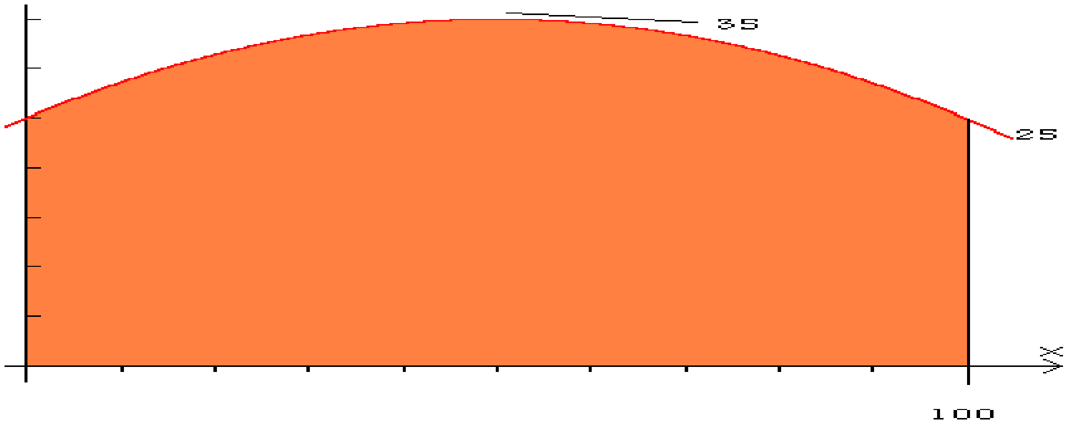
$$= 272\Pi = 854{,}51 VE$$

Der Körper sieht so aus:



Das Volumen eines Faßes

Gesucht ist das Volumen eines Fasses von 1m Höhe und den Radien 25 cm an den Enden und 35 cm in der Mitte. Die Randfunktion muss eine nach unten geöffnete Parabel sein wie hier in der Zeichnung.



Die Funktionsbeschreibung dieser Parabel kann über die Scheitelpunktform leicht erstellt werden. Allgemein gilt: $f(x) = -a \times (x-5)^2 + 3{,}5$ (Die Werte in dm)

Die -5 gibt bekanntlich die Verschiebung des Scheitelpunktes in x+ Richtung an und die 3,5 in y+ Richtung. Das Minuszeichen vor dem Streckungsfaktor a ist notwendig, um eine nach unten geöffnete Parabel zu erhalten.
Fehlt nur noch der Faktor a. Setzt man jedoch in die Formel einen bekannten Punkt ein, kann man a errechnen. Der Punkt ist (0/2,5).

$$f(x) = -a \times (x-5)^2 + 3{,}5 \xrightarrow{also} 2{,}5 = -a \times (0-5)^2 + 3{,}5$$

$$\frac{2{,}5-3{,}5}{25} = -0{,}04$$

Die gesuchte Funktion ist also

$$f(x) = -0{,}04 \times (x-5)^2 + 3{,}5$$

Der Einfachheit halber stellen wir die Gleichung in die Normalform um:

$$f(x) = -0{,}04 \times (x-5)^2 + 3{,}5$$

- Den Faktor –0,04 ausklammern: $f(x) = -0{,}04 \times ((x-5)^2 - 87{,}5)$
- Das Binom auflösen: $f(x) = -0{,}04 \times (x^2 - 10x + 25 - 87{,}5)$
- Vereinfachen: $f(x) = -0{,}04 \times (x^2 - 10x - 62{,}5)$
- Den Faktor wieder einklammern: $f(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}4x + 2{,}5$

Jetzt müssen wir nur noch den Rotationskörper im Intervall von 0 bis 10 ausrechnen.

$$\Pi \times \int_0^{10} (-0{,}04x^2 + 0{,}4x + 2{,}5)^2\, dx = \Pi \times \int_0^{10} (0{,}0016x^4 - 0{,}032x^3 - 0{,}04x^2 + 2x + 6{,}25)dx$$

$$\Pi \times \left[\frac{0{,}0016}{5} \times x^5 - \frac{0{,}032}{4} \times x^4 - \frac{0{,}04}{3} \times x^3 + x^2 + 6{,}25x \right]_0^{10}$$

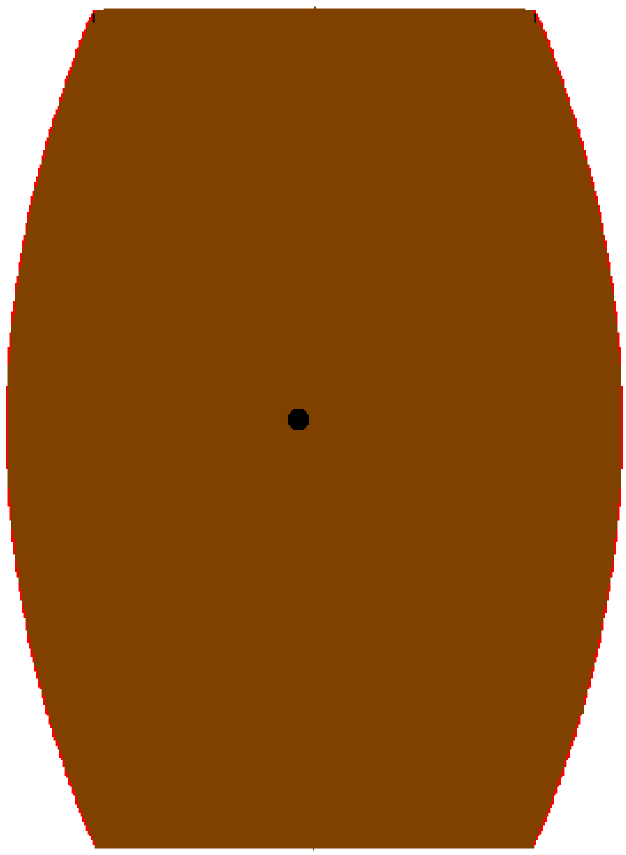
$$\Pi \times \left[\frac{0{,}0016}{5} \times 10^5 - \frac{0{,}032}{4} \times 10^4 - \frac{0{,}04}{3} \times 10^3 + 100 + 62{,}5 \right]_0^{10}$$

$$\Pi \times \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62{,}5 \right]_0^{10} = 101{,}167\Pi \quad \textit{Volumeneinheiten}$$

$$= 317{,}824 \quad \textit{Liter}$$

Das Fass hat ein Volumen von 317,824 Liter

Und so sieht es etwa aus



Wichtige Stammfunktionen

Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a\rvert$
x^n	$\frac{1}{n+1} \times x^{n+1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \times x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times \sqrt{x^3}$
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$\frac{1}{-3+1} \times x^{-3+1} = -\frac{1}{2} \times x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$	$\frac{1}{-\frac{5}{3}+1} \times x^{-\frac{5}{3}+1} = -\frac{3}{2} \times x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2 \times \sqrt[3]{x^2}}$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{n+1} \times (ax+b)^{n+1}\right)$ **Kettenregel:** Potenzregel anwenden (große Klammer) und durch innere Ableitung teilen.
a	ax
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\ln(x)$	$x \times \ln(x) - x$
$\ln(a \times x) = \ln(a) + \ln(x)$	$\ln(a) \times x + x \times \ln(x) - x$
e^x	e^x
$e^{a \times x}$	$\frac{1}{a} e^{a \times x}$
$a^x = e^{\ln(a) \times x}$	$\frac{1}{\ln(a)} e^{\ln(a) \times x} = \frac{1}{\ln(a)} a^x$ **Kettenregel:** Potenzregel anwenden und durch innere Ableitung teilen. Dann vereinfachen.
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$